Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Quantificateurs*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs réelles. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est la fonction nulle : $\forall x \in I,\ f(x) = 0$.
   Sa négation : $\exists x \in I,\ f(x) \neq 0$.
2. f s'annule : $\exists x \in I,\ f(x) = 0$.
   Sa négation : $\forall x \in I,\ f(x) \neq 0$.
3. f est à valeurs positives : $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$.
   Sa négation : $\exists x \in I,\ f(x) < 0$.
4. f est constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) = c$, ou autre formulation équivalente :
   $\forall x, y \in I,\ f(x) = f(y)$.
   Sa négation : $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x \in I,\ f(x) \neq c$, ou autre formulation équivalente :
   $\exists x, y \in I,\ f(x) \neq f(y)$.
5. f est strictement croissante sur I : $\forall x, y \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
   Sa négation : $\exists x, y \in I,\ x < y$ et $f(y) \leq f(x)$

Exercice 2. *Equation différentielle originale*

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation :

$$(E')\ \ y''(t) + y(-t) = t\cos t$$

Soit y une telle solution de classe $\mathcal{C}^2$

1. Montrons qu'il existe un unique couple p et i de fonctions respectivement paires et impaires telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = p(t) + i(t)$:
   Si deux fonctions p et i vérifient cela, on a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{rcl} y(t) & = & p(t) + i(t) \\ y(-t) & = & p(t) - i(t) \end{array}\right.$, d'où l'on déduit :
   $$p(t) = \frac{y(t) + y(-t)}{2} \text{ et } i(t) = \frac{y(t) - y(-t)}{2}.$$
   Réciproquement, ces deux fonctions vérifient les conditions demandées.
2. Les fonctions p et i précédentes sont solutions de l'équation :
   $$p''(t) + i''(t) + p(-t) + i(-t) = t\cos t, \text{ i.e. } p''(t) + p(t) + i''(t) - i(t) = t\cos t.$$
   Ici, il est bon de savoir (ou de le vérifier rapidement) qu'une fonction paire a une dérivée impaire et une fonction impaire a une dérivée paire. Ainsi les fonctions $p'' + p$ et $i'' - i$ sont respectivement paire et impaire, tandis que $t \mapsto t\cos t$ est une fonction impaire. Donc l'unicité de la décomposition d'une fonction (ici, la fonction $t \mapsto t\cos t$ qui est impaire) comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire nous garantit que p et i vérifient le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{rcll} p''(t) + p(t) & = & 0 & (1) \\ i''(t) - i(t) & = & t\cos t & (2) \end{array}\right.$$

3. Les solutions de (1) sont $\{y : t \mapsto A\cos t + B\sin t \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$, donc les solutions paires sont celles de la forme $t \mapsto A\cos t$ avec $A \in \mathbb{R}$.
   Les solutions de (2) sont $\{y : t \mapsto Ae^{-t} + Be^t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$, donc les solutions impaires sont les fonctions du type $t \mapsto -Be^{-t} + Be^t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ où $B \in \mathbb{R}$.
4. On en déduit finalement l'ensemble des solutions de (E') :
$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto A\cos t - Be^{-t} + Be^t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 3. *Une inéquation fonctionnelle, Suède* 1962.

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels :
$$|f(y) - f(x)| \leq 7(x-y)^2.$$
On considère une fonction f qui est solution de notre problème.
On considère deux nombres x et y réels tels que $x < y$. On coupe l'intervalle $[x, y]$, en $n \in \mathbb{N}^*$ parties de même largeur, selon un découpage $x_0 = x$, x_1, x_2,...,$x_n = y$, de sorte que pour tout entier k entre 0 et n, $x_k = x + k\frac{y-x}{n}$.

1. Avec les hypothèses et notations précédentes, on note pour tout k entier entre 1 et n : $a_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Que vaut la somme $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$?
   Cette somme est télescopique donc on obtient : $S = f(x_n) - f(x_0) = f(y) - f(x)$.
2. A l'aide des questions précédentes, montrer que si x et y sont des réels tels que $x < y$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$
   On rappelle que l'on a :
$$f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
   On en déduit par inégalité triangulaire :
$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$
   Or si $k \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$|a_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq 7(x_k - x_{k-1})^2 = 7\left(\frac{y-x}{n}\right)^2$$
   On en déduit :
$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} 7\left(\frac{y-x}{n}\right)^2$$
$$|f(y) - f(x)| \leq n\frac{7(x-y)^2}{n^2}.$$
$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$
3. Avec les hypothèses de la question précédente, montrer que $|f(y) - f(x)| = 0$.
   Comme $\frac{7(x-y)^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit de la question précédente que : $|f(y) - f(x)| \leq 0$ donc $|f(y) - f(x)| = 0$.
4. On a montré dans la question précédente qu'une fonction qui est solution du problème est constante, puisque pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, on a $f(x) = f(y)$. Réciproquement, toute fonction constante est une solution.