Devoir **2025**
PCSI DS n° 7

Devoir surveillé

Exercice 1. *Quantificateurs*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes puis leurs négations :

1. f est la fonction nulle.
2. f s'annule.
3. f est à valeurs positives.
4. f est constante.
5. f est strictement croissante sur I.

Exercice 2. *Equation différentielle originale*

On cherche à déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation :

$$(E') \quad y''(t) + y(-t) = t\cos t$$

Soit y une telle solution de classe $\mathcal{C}^2$

1. Montrer qu'il existe un unique couple p et i de fonctions respectivement paires et impaires telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = p(t) + i(t)$.
2. Montrer que les fonctions p et i précédentes sont solution des équations différentielles :
$$\begin{cases} p''(t) + p(t) & = & 0 & (1) \\ i''(t) - i(t) & = & t\cos t & (2) \end{cases}$$
3. Décrire l'ensemble des solutions paires de (1), et l'ensemble des solutions impaires de (2).
(pour (2), on admettra que $i_p(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$ est une solution particulière)
4. Déterminer finalement l'ensemble des solutions de (E')

Exercice 3. *Une inéquation fonctionnelle, Suède* 1962.

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels :

$$|f(y) - f(x)| \leq 7(x-y)^2.$$

On considère une fonction f qui est solution de notre problème.
On considère deux nombres x et y réels tels que $x < y$. On coupe l'intervalle $[x, y]$, en $n \in \mathbb{N}^*$ parties de même largeur, selon un découpage $x_0 = x$, x_1, x_2,...,$x_n = y$, de sorte que pour tout entier k entre 0 et n, $x_k = x + k\frac{y-x}{n}$.

1. Avec les hypothèses et notations précédentes, on note pour tout k entier entre 1 et n : $a_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Que vaut la somme $S = \sum_{k=1}^{n} a_k$?
2. Montrer que l'on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$
3. Prouver alors que $|f(y) - f(x)| = 0$.
4. Conclure.