# Devoir à la maison

On étudie dans ce devoir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

**Etude de la convergence de la suite $x$**

1. Quelle propriété simple vérifie la suite $(x_n)$ vous permettant d'affirmer qu'elle a nécessairement une limite, finie ou infinie ?
2. Montrer que l'on a pour tout $k \geq 2$ :

$$\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2}$$

3. Calculer la somme suivante pour $n \geq 2$ :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} \right)$$

4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

**Etude de fonctions**

5. A l'aide d'études de fonctions, démontrer les inégalités suivantes pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$\sin x < x < \tan x$$

6. Montrer alors que l'on a pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$$

**Une formule trigonométrique**

7. Par exemple à l'aide de la formule de duplication du sinus, démontrer la formule suivante valable pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi - x}{2}} \right)$$

## Etude de la limite de la suite $x$

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

8. Calculer $u_0$.
9. Montrer à l'aide de la formule trigonométrique démontrée précédemment que la suite $(u_n)$ vérifie pour tout $n \geq 1$ : $u_n = \dfrac{1}{4}u_{n+1}$.
   Indication : On pourra couper la somme en deux à l'aide de la formule évoquée ci-dessus, puis faire le changement de variable $j = 2^{n+1}-1-k$ dans la deuxième partie de la somme.
10. Calculer $u_n$ en fonction de $n$
11. Montrer que l'on a l'inégalité suivante, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$u_n - 2^n \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4^{n+2}}{(2k+1)^2\pi^2} \leq u_n$$
12. Déduire des deux questions précédentes un encadrement de $x_{2^n-1}$ si $n \in \mathbb{N}$.
    Montrer la convergence de la suite $(x_{2^n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
13. Conclure concernant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.