

## Corrigé du devoir à la maison

On étudie dans ce devoir la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$$

### Etude de la convergence de la suite $x$

1. La suite  $(x_n)$  est croissante car  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(2n+3)^2} > 0$  donc elle est convergente vers  $l \in \mathbb{R}$  ou divergente vers  $+\infty$ .
2. Calculons :

$$\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{4k+2 - (4(k-1)+2)}{(4(k-1)+2)(4k+2)}$$

$$\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{4}{(4k-2)(4k+2)}$$

$$\frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

Si  $k$  est un entier et  $k \geq 2$ , on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

Donc on peut en déduire :

$$\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2}$$

3. La somme suivante est une somme télescopique donc on a pour  $n \geq 2$  :

$$S_n = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{4(k-1)+2} - \frac{1}{4k+2} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{4(2-1)+2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$S_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{4n+2}$$

4. D'après la question 2, on a pour  $n \geq 2$  :

$$x_n \leq 1 + \frac{1}{9} + S_n$$

$$x_n \leq 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$$

Ceci prouve que la suite  $(x_n)$  est majorée, donc qu'elle converge.

## Etude de fonctions

5. Soient  $g$  et  $h$  les fonctions définies pour  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  par :

$$g(x) = x - \sin x \quad ; \quad h(x) = \tan x - x$$

Ces deux fonctions sont dérivables sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ , de dérivées :

$$g'(x) = 1 - \cos x \quad ; \quad h'(x) = \tan^2 x$$

Ainsi, les deux fonctions  $g$  et  $h$  sont strictement croissantes sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . Comme  $g$  et  $h$  sont continues en 0 et que  $h(0) = g(0) = 0$ , on en déduit que pour tout  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $g(x) > 0$  et  $h(x) > 0$  et donc que  $\sin x < x < \tan x$ .

6. Notre inégalité ci-dessus concerne trois nombres strictement positifs, et la fonction inverse est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc on a :

$$\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

Comme la fonction  $x \mapsto x^2$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^2 x} &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\ \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\ \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \\ \frac{1}{\sin^2 x} - 1 &< \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

## Une formule trigonométrique

On a pour tout  $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{\left(2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \\ \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) \end{aligned}$$

Or on sait que  $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$  donc :

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi - x}{2}} \right)$$

## Etude de la limite de la suite $x$

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)}$ .

7. Calculons  $u_0 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} = 2$ .

8. D'après la formule démontrée dans la partie 1.3, la suite  $(u_n)$  vérifie pour tout  $n \geq 1$  :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}} \right)} + \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}} \right)} \right)$$

$$u_n = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}} \right)} + \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi(2^{n+2} - (2k+1))}{2^{n+3}} \right)} \right)$$

Faisons le changement de variable  $j = 2^{n+1} - 1 - k$  dans la deuxième somme : on voit que  $j$  varie entre  $2^{n+1} - 1$  et  $2^{n+1} - 2^n = 2^n$  et qu'il faut remplacer  $k$  par  $2^{n+1} - 1 - j$ .

$$u_n = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}} \right)} + \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi(2^{n+2} - (2(2^{n+1}-1-j)+1))}{2^{n+3}} \right)} \right)$$

$$u_n = \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+3}} \right)} + \sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{\pi(2j+1)}{2^{n+3}} \right)} \right)$$

Donc on a bien  $u_n = \frac{1}{4} u_{n+1}$ .

9.  $u_n = 2 \times 4^n$

10. Pour  $0 \leq k \leq 2^n - 1$ , on a  $\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  donc :

$$\frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)} - 1 < \frac{1}{\left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)^2} < \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)} - 1 < \frac{4^{n+2}}{(2k+1)^2 \pi^2} < \frac{1}{\sin^2 \left( \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \right)}$$

En sommant cette inégalité pour  $k$  variant entre 0 et  $2^n - 1$ , on obtient :

$$u_n - 2^n \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4^{n+2}}{(2k+1)^2 \pi^2} \leq u_n$$

11. On note  $\phi$  l'extraction telle que  $\phi(n) = 2^n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On déduit l'encadrement suivant de  $x_{\phi(n)}$  si  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n - 2^n \leq \frac{4^{n+2}}{\pi^2} x_{\phi(n)} \leq u_n$$

$$2 \times 4^n - 2^n \leq \frac{4^{n+2}}{\pi^2} x_{\phi(n)} \leq 2 \times 4^n$$

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{2^n \pi^2}{2^{2n+4}} \leq x_{\phi(n)} \leq \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2^{n+4}} \leq x_{\phi(n)} \leq \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi, on conclut par encadrement que  $x_{\phi(n)} \rightarrow \frac{\pi^2}{8}$ .

12. On a vu au début de ce devoir que  $(x_n)$  est soit convergente, soit divergente vers  $+\infty$ . D'après le cours, toute suite extraite de  $(x_n)$  a alors le même comportement que  $(x_n)$  dans chacune de ces deux hypothèses. Donc la suite  $(x_n)$  converge vers  $\frac{\pi^2}{8}$  puisque c'est le cas d'une de ses suites extraites.