

Limites et fonctions continues

1 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1.

Soit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{4} + 1 \end{aligned}.$$

1. Tracer le graphe de f et étudier le signe de $F(x) = f(x) - x$.
2. On définit $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Etudier le sens de variation de (u_n) .

3. Si $u_0 \in [0, 2]$, montrer que (u_n) converge ; calculer sa limite.
4. Etudier (u_n) si $u_0 > 2$, si $u_0 < 0$.

Exercice 2.

On définit $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

1. Justifier cette définition.
2. Etudier le signe de $\ln(1 + x) - x$ si $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 3.

Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{3}(4 - x^2) \end{aligned}$$

et $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Tracer le graphe de f et étudier le signe de $f(x) - x$.
2. Si $u_0 < -4$, étudier le sens de variation de (u_n) et montrer que $u_n \rightarrow -\infty$.
3. Que dire si $u_0 > 4$?
4. On suppose $u_0 \in [0, 2]$. Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \in [0, 2]$. Etudier (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ; en déduire que $u_n \rightarrow 1$.
5. On suppose $u_0 \in]-4, 0]$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > 0$, et déduire du cas précédent que $u_n \rightarrow 1$.
6. Etudier les cas $u_0 \in [2, 4[$, $u_0 = -4$ et $u_0 = 4$. Résumer les résultats obtenus.

Exercice 4.

Etudier les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$\begin{aligned} u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= \sin(u_n). \\ v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} &= \cos(v_n). \end{aligned}$$

2 Limites et continuité ponctuelle

Exercice 5. Prolongement par continuité

Les fonctions :

$$x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \text{et} \quad x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

ont-elles des limites en 0 ? Peut-on les prolonger par continuité en 0 ?

Exercice 6. Avec la partie entière

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^{+*} par :

$$f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

1. En quels points la fonction f est-elle continue ?
2. Donner les limites à droite et à gauche en un point de discontinuité.

Exercice 7. Fonction périodique et limite en $+\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est T -périodique et que $f(x) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 8. Maximum d'une fonction continue sur un intervalle

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max \{f(t), t \in [0, x]\} \end{aligned}$$

est continue.

Exercice 9. Limites monotones pour des fonctions

Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est croissante et que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante. Montrer que f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

3 Fonctions continues

Exercice 10. Point fixe d'une fonction continue stabilisant un segment

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une application continue ; montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 11. Point fixe d'une fonction continue décroissante sur \mathbb{R}

Soit f décroissante et continue sur \mathbb{R} . Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 12. Point fixe de $f \circ f$ et point fixe de f

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(x_0) = x_0$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 13. Fonctions qui commutent pour la composition

Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues telles que $g \circ f = f \circ g$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 14. *Application fine du théorème des valeurs intermédiaires*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant $f(0) = f(1)$. Si n est un entier ≥ 2 , montrer qu'il existe $x_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 15. *Inégalités strictes et fonctions continues sur un segment*

1. Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) > g(x).$$

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq g(x) + \lambda.$$

Le résultat subsiste-t-il si on remplace $[a, b]$ par un intervalle non fermé ou non borné ?

2. On suppose maintenant :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) > g(x) \geq 0.$$

Montrer qu'il existe $\mu > 1$ tel que :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) \geq \mu g(x).$$

Exercice 16. *Caractérisation des fonctions constantes*

Trouver les fonctions f continues sur un intervalle I de \mathbb{R} dont l'image $f(I)$ ne contient qu'un nombre fini de points.

Exercice 17. *Injectivité et monotonie*

Soient I un intervalle (contenant au moins deux points) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer, si f est strictement monotone, que f est injective.
2. Trouver une fonction injective et non strictement monotone.
3. Montrer, si f est injective et continue, que f est strictement monotone.

Exercice 18. *Limites d'une fonction injective aux bords d'un intervalle*

Soit f une fonction définie et continue sur $I =]a, b[$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f = \lim_{x \rightarrow b} f = l.$$

Montrer que f n'est pas injective.

Indication : on pourra raisonner par contraposée et se ramener aux résultats de l'exercice précédent.

Exercice 19. *Limites finies et fonctions bornées*

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Montrer que f est bornée.

Exercice 20. *Limites infinies et minoration*

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . On suppose :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum.

4 Equations fonctionnelles

Exercice 21. *Caractérisations des fonctions constantes*

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x + 1).$$

Montrer que f est constante.

3. Déterminer les $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et en 1 telles que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$.

Exercice 22. *Morphismes continus de \mathbb{R} pour la loi +*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On pose $a = f(1)$.

1. Montrer que $f(0) = 0$. En déduire que f est impaire.
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$.
3. Montrer que pour tous $r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}, f(rx) = rf(x)$. En particulier, $f(r) = ar$.
4. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}, f(t) = at$. Conclure l'étude.

Indication : Montrer que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels tels que

$$r_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} t.$$

Exercice 23.

Existe-t-il $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-f(x)) = x \quad ?$$

Exercice 24.

Déterminer les $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues telles que $f \circ f = f$.

Indications : on commencera par justifier que $f([0, 1]) = [a, b]$ où $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Ensuite, on prouvera que $\forall x \in [a, b], f(x) = x$.

Enfin, on vérifiera qu'une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle qu'il existe a et b vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\forall x \in [0, 1], f(x) \in [a, b]$ et $\forall x \in [a, b], f(x) = x$ est bien une solution de notre problème.

Exercice 25.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 1$ et $a \neq 0$. On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f(x) = ax + b.$$

1. Si $a \in \mathbb{R}^{-*}$, existe-t-il des f solutions ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f \circ f \circ f(x)$ de deux façons et en déduire une relation entre $f(x)$ et $f(ax + b)$.
3. On suppose $a \in]0, 1[$. Montrer que f' est constante. En déduire l'ensemble des solutions.
4. En déduire l'ensemble des solutions pour $a \in]1, +\infty[$.