Devoir à la maison

Exercice 1. *Suites définies par récurrence*

On considère dans cet exercice les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

On notera $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

1. Justifier que les suites du type décrit précédemment sont bien définies.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$, tracer sa courbe représentative dans un repère orthornormé.
3. Etudier le signe de $g(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. Si $u_0 \in [\sqrt{2}, +\infty[$, prouver que la suite (u_n) est décroissante et minorée.
5. Si $u_0 \geq \sqrt{2}$, prouver que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
6. Que pouvez-vous dire si $u_0 \in]0, \sqrt{2}[$?
7. Que pouvez-vous dire si $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$?

Exercice 2. *Diverses propriétés des fonctions continues*

Dans cet exercice, on considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Parmi les différentes affirmations ci-dessous, prouver celles qui sont vraies ou donner un contre-exemple lorsqu'elles sont fausses.

1. Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f n'est pas bornée.
3. Si f est périodique, alors f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.