

Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. Diverses propriétés des fonctions continues

Dans tout cet exercice, on considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Parmi les différentes affirmations ci-dessous, prouver celles qui sont vraies ou donner un contre-exemple lorsqu'elles sont fausses.

(a) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, alors f admet un maximum sur \mathbb{R} .

Cette proposition est vraie : considérons le nombre $f(0)$, on a $m \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq m \Rightarrow f(x) \leq f(0)$ puisque la limite de f en $-\infty$ est $-\infty$, et $M \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq M \Rightarrow f(x) \leq f(0)$ puisque la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$.

Sur l'intervalle $[m, M]$, la fonction f est continue, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Elle admet en particulier un maximum $f(x_0)$ atteint en $x_0 \in [m, M]$. Ce maximum est un maximum sur \mathbb{R} puisque si $x \notin [m, M]$, on a $f(x) \leq f(0) \leq f(x_0)$.

(b) Si f est strictement croissante sur \mathbb{R} , alors f n'est pas bornée : cette proposition est fausse comme le montre la fonction Arctan qui est strictement croissante sur \mathbb{R} à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

(c) Si f est périodique, alors f admet un maximum sur \mathbb{R} : cette proposition est vraie car, si l'on note $T > 0$ une période de la fonction, il suffit de considérer la fonction f sur l'intervalle $[0, T]$ où elle est continue. f admet donc sur cet intervalle un maximum, qui est alors un maximum sur \mathbb{R} par périodicité.

Exercice 2. Suites définies par récurrence

On considère dans cet exercice les suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

On notera $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

1. Justifier que les suites du type décrit précédemment sont bien définies.

Par la fonction g , on constate que \mathbb{R}^* est stable. En effet, si $x \in \mathbb{R}^*$, on a l'alternative $x < 0$ et alors $g(x) < 0$ ou $x > 0$ et alors $g(x) > 0$ donc dans les deux cas, on a bien $g(x) \in \mathbb{R}^*$.

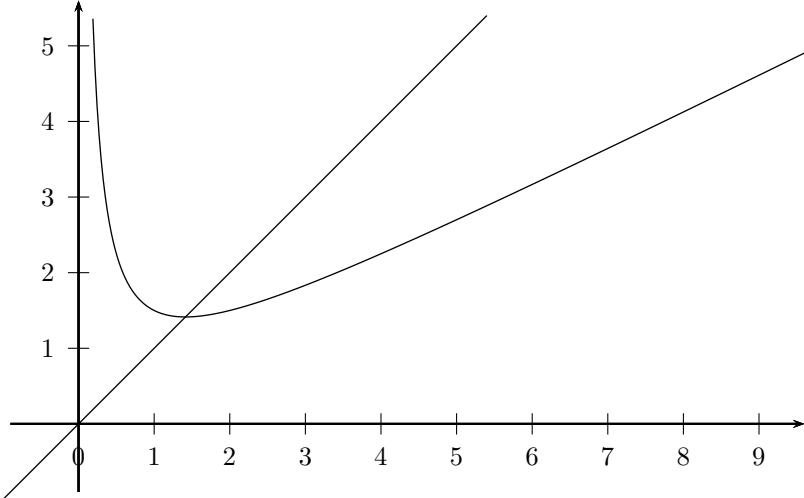
Puisque \mathbb{R}^* est stable par g , les suites récurrentes de cet exercice sont bien définies.

2. Etudier les variations de la fonction g sur \mathbb{R}_+^* .

g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et l'on a si $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{2x^2}.$$

Ainsi, sur $]0, \sqrt{2}[, g$ est décroissante tandis que g est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.



3. Etudier le signe de $g(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. On calcule :

$$g(x) - x = \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{2 - x^2}{2x},$$

et l'on en déduit le tableau de signe suivant :

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x) - x$		+	0

4. Si $u_0 \in [\sqrt{2}, +\infty[$, prouver que la suite (u_n) est décroissante et minorée.

On commence par remarquer que $[\sqrt{2}, +\infty[$ est un intervalle stable par la fonction g : soit $x \in [\sqrt{2}, +\infty[$, on a par croissance de g sur cet intervalle $g(\sqrt{2}) \leq g(x)$ i.e. $\sqrt{2} \leq g(x)$ donc $g(x) \in [\sqrt{2}, +\infty[$. Puisque l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$ est stable, la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$ si $u_0 \geq \sqrt{2}$.

On déduit alors du tableau de signe précédent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \leq 0$, c'est à dire $g(u_n) - u_n \leq 0$ i.e. $u_{n+1} \leq u_n$. La suite est donc décroissante.

5. Si $u_0 \geq \sqrt{2}$, prouver que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{2}$.

D'après la question précédente, d'après le théorème de la limite monotone, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \in [\sqrt{2}, +\infty[$. Comme g est continue, on a $g(l) = l$, c'est à dire $g(l) - l = 0$ ce qui n'est possible que pour $l = \sqrt{2}$.

6. Que pouvez-vous dire si $u_0 \in]0, \sqrt{2}[$?

On remarque grâce aux variations de f que si $u_0 \in]0, \sqrt{2}[$, alors $u_1 = g(u_0) \in [\sqrt{2}, +\infty[$. Ainsi, la suite (u_n) est à termes dans $[\sqrt{2}, +\infty[$ et décroissante à partir du rang 1. On a donc encore $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{2}$.

7. Que pouvez-vous dire si $u_0 \in \mathbb{R}_-^*$? On a un comportement symétrique au cas où $u_0 > 0$ dans la mesure où f est impaire : si $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$, la suite est croissante et converge vers $-\sqrt{2}$; si $u_0 \in]-\sqrt{2}, 0[$, alors $u_1 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et l'on a encore $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\sqrt{2}$.