Devoir surveillé

Cours

1. $\sum_{k=0}^{n} k = \cdots$ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \cdots$

2. Sommes doubles à écrire comme deux sommes imbriquées
   (a) $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \cdots$

   $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = \cdots$

   (b) $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \cdots$

   $\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \cdots$

   (c) $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \cdots$

   $\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j} = \cdots$

3. Coefficients binomiaux, formules :

$$(i)\text{ Symétrie } \binom{n}{k} = \binom{\cdots}{\cdots}$$

$$(ii)\text{ Pascal } \binom{n+1}{k} = \binom{\cdots}{\cdots} + \binom{\cdots}{\cdots}$$

$$(iii)\text{ Formule utile } k\binom{n}{k} = \cdots$$

4. Donner les définitions des limites :
   (a) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$

   (b) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Exercice 1. *Calculs de sommes*

1. Sommes doubles.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{0 \leq i,j \leq n} (i+j)$$
$$S_2 = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$$
$$S_3 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (i+j)$$

2. Sommes binomiales.
   (a) Pour a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du binôme de Newton permettant de développer $Z_n = (a+b)^n$.
   Ecrire complètement, sans le signe Σ, la formule ainsi obtenue pour $n = 5$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
      i. Selon la valeur de $k \in [\![0, n]\!]$, calculer :

$$S_k = \sum_{p=1}^{n} \omega^{-kp}.$$

      ii. Montrer alors que l'on a si $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{p=1}^{n} (z + \omega^p)^n = n(z^n + 1).$$

      Indication :on pourra écrire cette somme comme une double somme, puis permuter les sommes.

Exercice 2. *Divergence de la série harmonique*

On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n$
2. Quelle propriété de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie assure que cette suite a une limite.
   De quel type de limite peut-il s'agir ?
3. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n} - u_n$.
   Exprimer v_n sous forme d'une somme puis prouver que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq \frac{1}{2}.$$

4. Déduire des deux questions précédentes que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.