Corrigé du devoir surveillé

Cours

1. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Sommes doubles à écrire comme deux sommes imbriquées
   (a) $\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$

   $\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$

   (b) $\sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$

   $\sum_{1\le i\le j\le n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$

   (c) $\sum_{1\le i< j\le n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$

   $\sum_{1\le i< j\le n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$
3. Coefficients binomiaux, formules :

$$(i)\text{ Symétrie } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(ii)\text{ Pascal } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$(iii)\text{ Formule utile } k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

4. Donner les définitions des limites :
   (a) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ N \le n \Rightarrow |u_n - l| \le \epsilon$$

   (b) $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ N \le n \Rightarrow u_n \le m$$

Exercice 1. *Calculs de sommes*

1.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{0\le i,j\le n} (i+j)\\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}(i+j)\\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} j\right)\\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)j\right)\\
S_1 &= \sum_{j=0}^{n}\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\sum_{j=0}^{n} j\\
S_1 &= \frac{n(n+1)^2}{2} + (n+1)\frac{n(n+1)}{2}\\
S_1 &= n(n+1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{0\le i\le j\le n} (i+j)\\
S_2 &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}(i+j)\\
S_2 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} i + \sum_{i=0}^{j} j\right)\\
S_2 &= \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + (j+1)j\right)\\
S_2 &= \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n}(j^2+j)\\
S_2 &= \frac{3}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{4}\left(n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)\right)\\
S_2 &= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+4)\\
S_2 &= \frac{1}{2}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}
$$

$$S_3 = \sum_{0\leq i<j\leq n} (i+j)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1}(i+j)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j-1} i + \sum_{i=0}^{j-1} j\right)$$
$$S_3 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(j-1)j}{2} + j^2\right)$$
$$S_3 = \sum_{j=0}^{n}\left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{1}{2}j\right)$$
$$S_3 = \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_3 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)(2n+1) - n(n+1)\right)$$
$$S_3 = \frac{1}{4}n(n+1)2n$$
$$S_3 = \frac{1}{2}n^2(n+1)$$

2. Sommes binomiales.
   (a)
$$Z_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
      i.
$$S_k = \sum_{p=1}^{n}\left(\omega^{-k}\right)^p.$$
      On distingue deux cas :
      — Si $\omega^{-k} = 1$, i.e. $e^{\frac{-2ik\pi}{n}} = 1$, ce qui équivaut à $\frac{-2k\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$ c'est à dire $k \equiv 0[n]$, alors on a :
$$S_k = \sum_{p=1}^{n} 1 = n,$$
      et ceci se produit pour $k = 0$ et $k = n$ donc $S_0 = S_n = n$.
      — Si $\omega^{-k} \neq 1$, donc pour k différent de 0 ou n :
$$S_k = \left(\omega^{-k}\right) + \left(\omega^{-k}\right)^2 + \left(\omega^{-k}\right)^3 + \cdots + \left(\omega^{-k}\right)^n.$$
$$S_k = \left(\omega^{-k}\right)\left(1 + \left(\omega^{-k}\right) + \left(\omega^{-k}\right)^2 + \cdots + \left(\omega^{-k}\right)^{n-1}\right).$$
$$S_k = \left(\omega^{-k}\right)\frac{1-\left(\omega^{-k}\right)^n}{1-\left(\omega^{-k}\right)}$$
$$S_k = \left(\omega^{-k}\right)\frac{1-e^{-2ik\pi}}{1-e^{\frac{-2ik\pi}{n}}}$$
$$S_k = 0.$$

ii. Montrer alors que l'on a si $z \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{p=1}^{n}(z+\omega^p)^n = n(z^n+1).$$

Indication :on pourra écrire cette somme comme une double somme, puis permuter les sommes.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n}(z+\omega^p)^n &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k\,(\omega^p)^{n-k} \\
\sum_{p=1}^{n}(z+\omega^p)^n &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{k} z^k\omega^{np}\omega^{-kp} \\
\sum_{p=1}^{n}(z+\omega^p)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k \sum_{p=1}^{n}\omega^{np}\omega^{-kp}
\end{aligned}$$

Or $\omega^{np} = e^{-2ik\pi} = 1$ donc on a :

$$\sum_{p=1}^{n}(z+\omega^p)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k S_k$$

D'après la question précédente, les seuls termes non nuls de la somme sont pour $k=0$ et $k=n$ donc :

$$\sum_{p=1}^{n}(z+\omega^p)^n = \binom{n}{0} S_0 + \binom{n}{n} S_n z^n = n + nz^n.$$

Exercice 2. *Divergence de la série harmonique*

On étudie dans cet exercice la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. On calcule $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc elle admet une limite qui est un nombre $l \in \mathbb{R}$ ou $+\infty$.
3. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_{2n} - u_n$.

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

On remarque que pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$, d'où l'on déduit :

$$v_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}$$

$$v_n \geq (2n-(n+1)+1)\frac{1}{2n}$$

Cette dernière inégalité une fois simplifiée, assure que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq \frac{1}{2}$.

4. Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite u ne tend pas vers $+\infty$, on a alors d'après la première question un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. On en déduit que $v_n = u_{2n} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l - l = 0$.

   Ceci est contradictoire avec l'inégalité $v_n \geq \frac{1}{2}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.