Devoir surveillé

Exercice 1. *Cours*

1. Calcul du terme général
   Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ le terme d'indice n des deux suites suivantes définies par récurrence :
   (a) La suite u vérifiant $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4$.
   (b) La suite v vérifiant $v_0 = 2$, $v_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$
2. Définition des limites
   Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Que signifie :
   (a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
   (c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 2. *Approximation du nombre d'or.*

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1 + \phi}$.

1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
   $$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$
   et ainsi de suite,
   $$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}$$
   avec n radicaux.
   On a donc pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
2. Représenter la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$ sur l'intervalle $[-1, 2]$ et les premiers termes de la suite à l'aide de la courbe de cette fonction. (Une échelle de 5cm pour une unité serait idéale)
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
   $$1 \leq u_n \leq \phi.$$
4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
   $$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$
7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
   $$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 3. ***NON BIS*** *Limites*

1. Limites avec la partie entière
   Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :
$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \ g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

2. Sans limite
   Démontrer que la fonction suivante n'a pas de limite en 0 :
$$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$h : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 4. ***BIS*** *Plus petite période*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que
- $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- pour tout $0 < \tau < T$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x+\tau) \neq f(x)$.

On pose
$$A = \{\tau > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+\tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $T > 0$.
   Indication : par l'absurde, on suppose que $T = 0$, on a donc si $n \in \mathbb{N}^*$ pour $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ un élément $t_n \in A$ tel que $0 < t_n \leq \frac{1}{n}$.
   - Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \left\lfloor \frac{x}{t_n} \right\rfloor t_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f(u_n) = f(0)$
   - Conclure
3. Démontrer que T est une période pour f.