Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Cours*

1. Calcul du terme général
   Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ le terme d'indice n des deux suites suivantes définies par récurrence :
   (a) La suite u vérifiant $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n + 4$.
   On résout $l = 3l + 4$ et on trouve $l = -2$.
   On sait que $v_n = u_n - (-2)$ est le terme général d'une suite géométrique de raison 3 d'où :
   $$u_n + 2 = 3^n(u_0 + 2)$$
   $$u_n = 3^n - 2$$
   (b) La suite v vérifiant $v_0 = 2$, $v_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n$
   Le polynôme caractéristique est :
   $$P(x) = x^2 - 5x + 6$$
   Ce trinôme a deux racines qui sont $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
   Ainsi, on a deux réels A et B tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = A2^n + B3^n$$
   On obtient le système d'équations suivant connaissant v_0 et v_1 :
   $$\begin{cases} A + B &= 2 \\ 2A + 3B &= 5 \end{cases}$$
   On trouve $A = 1$ et $B = 1$ donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = 2^n + 3^n$$
2. Définition des limites
   Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Que signifie :
   (a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$
   $$\forall \epsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall x \in D,\ |x - 2| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - 3| \leq \epsilon.$$
   (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
   $$\forall \epsilon > 0,\, \exists M \in \mathbb{R},\, \forall x \in D,\ M \leq x \Rightarrow |f(x) - 2| \leq \epsilon.$$
   (c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
   $$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists m \in \mathbb{R},\, \forall x \in D,\ x \leq m \Rightarrow M \leq f(x).$$

Exercice 2. *Approximation du nombre d'or.*

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :
$$x^2 - x - 1 = 0.$$
En particulier, on a $\phi = \sqrt{1 + \phi}$.

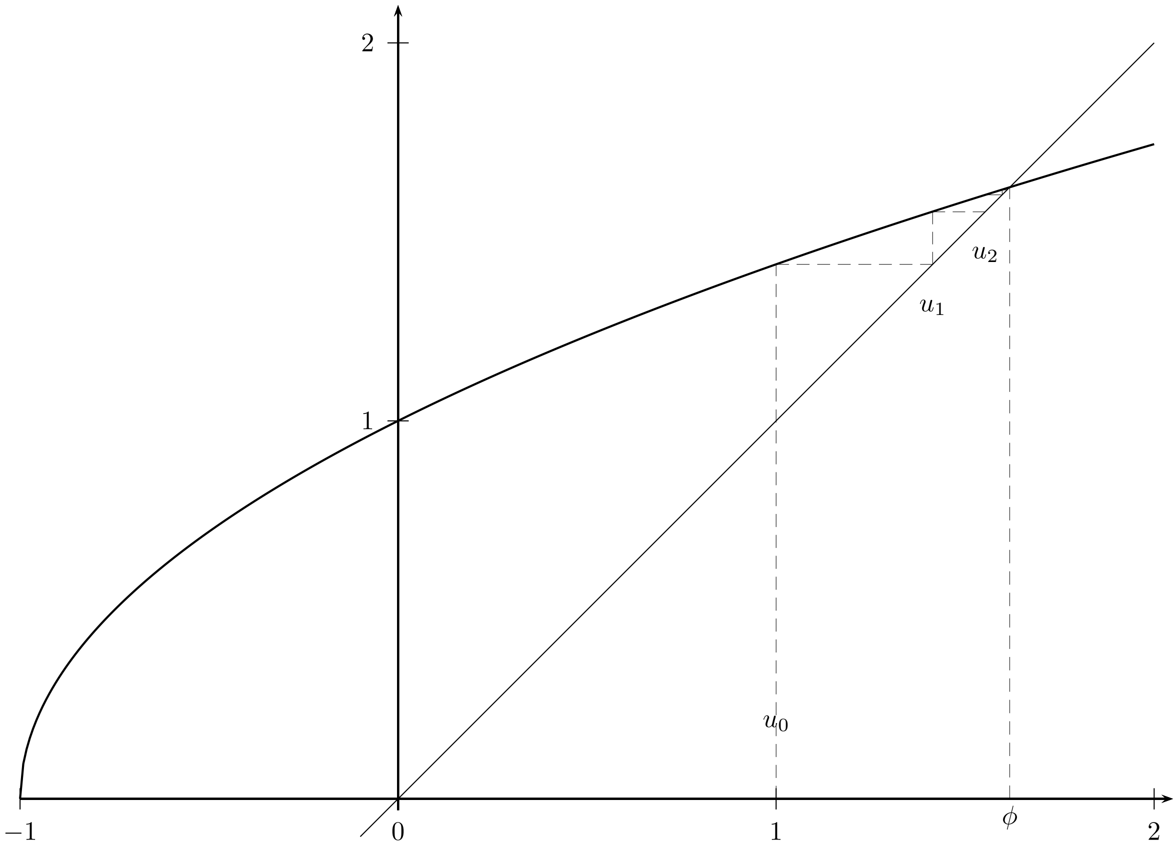
1. Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.
   La fonction $h : x \mapsto x^2 - x - 1$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Puisque $h(0) = -1$, $h(1) = -1$ et $h(2) = 1$, elle ne s'annule qu'une seule fois dans $\mathbb{R}_+$, en un point de l'intervalle $]1, 2[$.
   On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
   $$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$

et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}$$

avec n radicaux.
On a donc pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

2. Représenter la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle $[-1, 2]$ et les premiers termes de la suite à l'aide de la courbe de cette fonction. (Une échelle de 5cm pour une unité serait idéale)



3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$1 \leq u_n \leq \phi.$$
On vérifie simplement que $[1, \phi]$ est stable par f : soit $x \in [1, \phi]$, on a par croissance de f :
$$f(1) \leq f(x) \leq f(\phi)$$
$$\sqrt{2} \leq f(x) \leq \phi$$
donc on a bien $f(x) \in [1, \phi]$.
L'intervalle étant stable, tous les termes de la suite sont dans celui-ci.

4. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut prouver que $u_{n+1} \geq u_n$, i.e. $\sqrt{1 + u_n} \geq u_n$. Puisque les deux nombres sont positifs, cela revient à prouver que :
$$1 + u_n \geq u_n^2,$$
$$0 \geq u_n^2 - u_n - 1,$$
$$0 \geq h(u_n).$$
Ceci est vrai car la croissance de h sur l'intervalle $[1, \phi]$ et le fait que $u_n \in [1, \phi]$ nous garantit que :
$$h(1) \leq h(u_n) \leq h(\phi),$$
$$-1 \leq h(u_n) \leq 0.$$

5. Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.
   Indication : on pourra utiliser le fait que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$, on a aussi $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.
   (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ car c'est une suite croissante et majorée d'après les deux questions précédentes. Par passage des inégalités larges à la limite, on a $1 \leq l \leq \phi$.
   On a aussi $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$, or $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+l}$. Par unicité de la limite, on en déduit que $l = \sqrt{1+l}$. ϕ est le seul nombre positif qui vérifie ceci donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$.
6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$
   On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right|,$$
$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{\left(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi}\right)\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$
$$|u_{n+1} - \phi| = \left|\frac{u_n - \phi}{\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}\right)}\right|,$$
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{|u_n - \phi|}{2}.$$
7. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,
$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$
   On prouve enfin ceci par récurrence. Pour $n = 1$, ceci découle du fait que $u_1 = 1$ et $\phi \in [1, 2]$. Supposons maintenant que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente :
$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$$
   La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. ***NON BIS*** *Limites*

1. Limites avec la partie entière
   Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :
$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,\ g : x \mapsto x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$
   On rappelle que si $y \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ d'où l'on déduit :
$$y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$$
   En particulier, ici, on obtient pour $x > 0$:
   — $\frac{1}{x} - 1 \leq f(x)$ donc on déduit de $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty$ que l'on a aussi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
   — $x(\frac{1}{x} - 1) \leq g(x) \leq x\frac{1}{x}$
$$1 - x \leq g(x) \leq 1$$
   D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ par encadrement.
2. Sans limite
   Démontrer que la fonction suivante n'a pas de limite en 0 :
$$h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$h : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
   Soit $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{2n\pi+\pi}$ pour $n \in \mathbb{N}*$.
   On a alors $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $h(u_n) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ tandis que $h(v_n) = -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$ donc h n'a pas de limite en 0, sinon cette limite serait à la fois égale à 1 et -1.

Exercice 4. ***BIS*** *Plus petite période*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante. On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que

— $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

— pour tout $0 < \tau < T$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x+\tau) \neq f(x)$.

On pose

$$A = \{\tau > 0 : \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x+\tau) = f(x)\}.$$

1. Justifier que A admet une borne inférieure que l'on notera T.

   A est non vide puisque f est périodique, et A est minorée par 0 donc A admet une borne inférieure.

2. Démontrer que $T > 0$.

   Suivant l'indication, on raisonne par l'absurde et l'on suppose que $T = 0$, on a donc si $n \in \mathbb{N}^*$ pour $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ un élément $t_n \in A$ tel que $0 < t_n \leq \frac{1}{n}$.

   Soit alors $x \in \mathbb{R}$.

   — On note $u_n = \left\lfloor \frac{x}{t_n} \right\rfloor t_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On sait pour un réel y que $y - 1 \leq \lfloor y \rfloor \leq y$.

   On en déduit :

   $$\left(\frac{x}{t_n} - 1\right) t_n \leq u_n \leq \frac{x}{t_n} t_n$$

   $$x - t_n \leq u_n \leq x$$

   Puisque $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc par encadrement $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$

   — Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrons par récurrence sur k que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

   $$f(kt_n) = f(-kt_n) = f(0).$$

   Pour $k = 0$, cette propriété est évidente.

   Prouvons l'hérédité. On suppose la prpriété vérifiée au rang k. Or on sait que $f(kt_n) = f(kt_n + t_n)$ puisque $t_n \in A$. On a donc bien $f\left((k+1)t_n\right) = f(0)$ par hypothèse de récurrence.

   On a aussi $f(-(k+1)t_n) = f(-(k+1)t_n + t_n)$, c'est à dire $f(-(k+1)t_n) = f(-kt_n)$ d'où l'on déduit aussi que $f(-(k+1)t_n) = f(0)$ par hypothèse de récurrence.

   Ainsi, la propriété est vraie pour tout entier naturel k et l'on en déduit, si $l \in \mathbb{Z}$, que l'on a $f(lt_n) = f(0)$. En particulier, $f(u_n) = f(0)$

   — Concluons : on a $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ et f continue donc $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Ceci entraîne que $f(x) = f(0)$. f est donc constante, ce qui est la contradiction recherchée.

3. Démontrons que T est une période pour f : par définition de la borne inférieure, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un élément τ_n de A tel que $T \leq \tau_n \leq T + \frac{1}{n}$ de sorte que $\tau_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a puisque $\tau_n \in A$:$f(x + \tau_n) = f(x)$. Par continuité de f, on a donc en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$:$f(x+T) = f(x)$.

   Ainsi, f est T-périodique.