Devoir à la maison

Ce devoir à la maison est l'occasion de découvrir quelques applications majeures du théorème des accroissements finis et des développements limités à l'étude asymptotique des suites récurrentes.

1 Points fixes attractifs et répulsifs

Dans cette partie, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On considère une fonction $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour $x \in I$, on notera $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

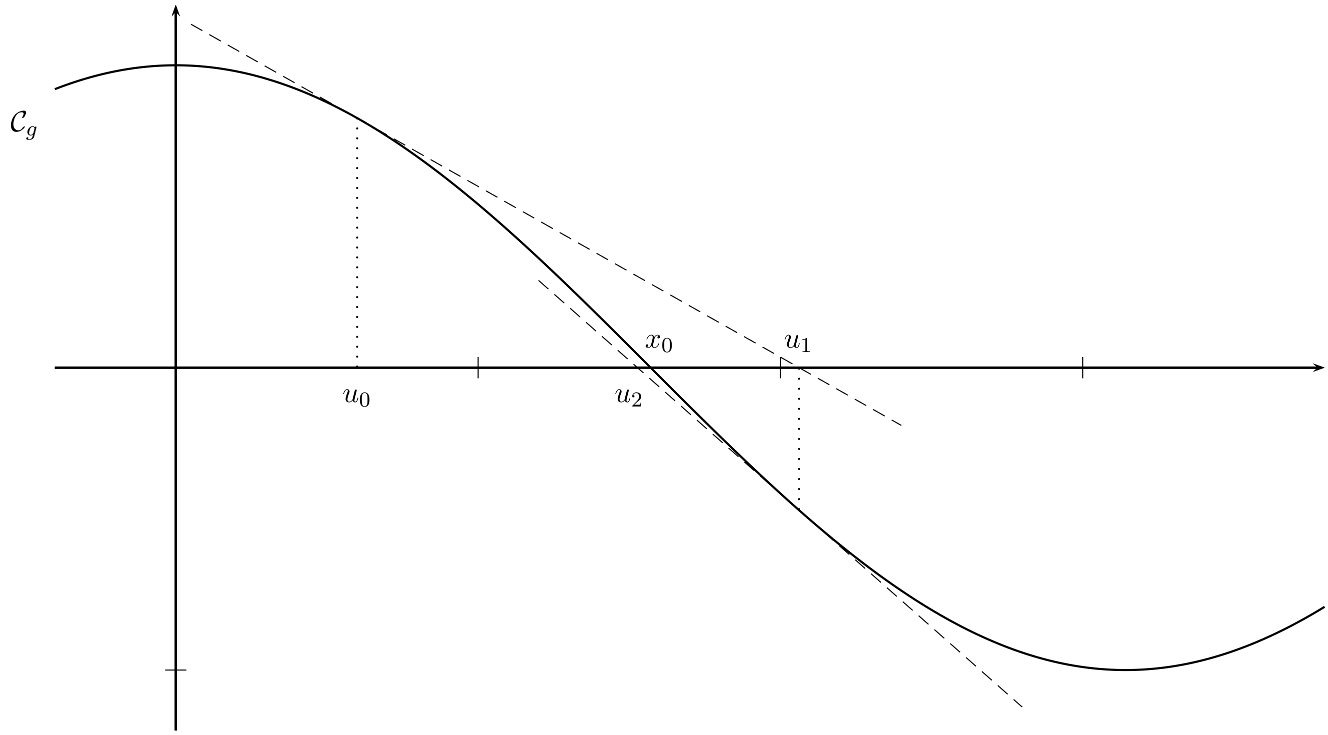
$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Soit $x_0 \in I$ tel que I contienne un voisinage de x_0 et $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f. En particulier, la suite $(u_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à x_0.

1. Lorsque x_0 est un point fixe de f et que $|f'(x_0)| < 1$, on dit que x_0 est un point fixe attractif.
   (a) Si x_0 est un point fixe attractif de f, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 < k < 1$ tels que :
   $$\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]\,,\ |f'(x)| \leq k.$$
   (b) Avec les notations de la question précédente, montrer que l'on a alors pour tout $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ et $n \in \mathbb{N}$: $|u_n(x) - x_0| \leq k^n |x - x_0|$.
   (c) Conclure quant à la convergence de $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ et expliquer pourquoi x_0 est appelé un point fixe attractif.
2. Lorsque x_0 est un point fixe de f et que $|f'(x_0)| > 1$, on dit que x_0 est un point fixe répulsif.
   (a) Si x_0 est un point fixe répulsif de f, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $k > 1$ tels que :
   $$\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]\,,\ |f'(x)| \geq k.$$
   (b) Montrer qu'une suite $u_n(x)$ ne peut alors converger vers x_0 que si elle est constante et égale à x_0 à partir d'un certain rang.
   Indication : Raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in I$ tel que $u_n(x) \to x_0$ et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq x_0$. Observer ensuite qu'à partir d'un certain rang N, on a pour $n \geq N$, $u_n(x) \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ et obtenir alors une inégalité comparable à celle de la question 1.b pour montrer que la convergence vers x_0 est impossible.

2 La méthode de Newton

Un problème important en mathématiques appliquées est la résolution approchée d'équations, c'est à dire le calcul des valeurs de x telles que $g(x) = 0$ où g désigne une fonction continue. Ici, on s'intéresse au cas d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. On suppose que l'équation $g(x) = 0$ a une solution x_0 à l'intérieur de l'intervalle I, dont on ne connait pas la valeur exacte. La méthode de Newton consiste, partant d'une valeur u_0 proche de x_0, à tracer la tangente à la courbe de g en le point d'abscisse $x = u_0$.



Cette tangente à $\mathcal{C}_g$ en le point d'abscisse u_0 croise l'axe des abscisses en un point u_1 à condition que $g'(u_0) \neq 0$, et l'on peut recommencer le même processus en remplaçant u_0 par u_1. On obtient ainsi u_2 comme sur l'exemple représenté ci-dessus.

1. Exprimer en fonction de u_0, de g et de g' l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en le point d'abscisse $x = u_0$.
2. En déduire en fonction de g et de g' l'expression de la fonction f telle que $f(u_0) = u_1$.
3. Si $g'(x_0) \neq 0$, vérifier que cette fonction f est bien définie sur un voisinage $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ de x_0, et que x_0 est un point fixe attractif de f.
4. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à condition que u_0 soit assez proche de x_0.

3 Vitesse de convergence vers un point fixe super-attractif

On reprend dans cette dernière partie les notations et hypothèses de la première partie, et l'on suppose que x_0 est un point fixe super-attractif de f, c'est à dire que $f(x_0) = x_0$ et $f'(x_0) = 0$.

1. Le but de cette question est de montrer que si $q > 0$ et que $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, on aura à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$, $|u_n(x) - x_0| \leq q^n$
   (a) Justifier l'existence d'un intervalle $[x_0 - \beta; x_0 + \beta]$ où $\beta > 0$ tel que :
   $$\forall x \in [x_0 - \beta; x_0 + \beta]\,,\ |f'(x)| \leq \frac{q}{2}.$$
   (b) Conclure.
2. Dans cette question, on suppose que f admet un développement limité d'ordre 2 en le point x_0.
   (a) Montrer qu'il existe $K > 0$ et $\gamma > 0$ tels que :
   $$\forall x \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]\,,\ |f(x) - x_0| \leq K|x - x_0|^2 \leq |x - x_0|.$$
   (b) Montrer que l'on a alors pour tous $x \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]\,,\ n \in \mathbb{N}$:
   $$|u_n(x) - x_0| \leq \frac{1}{K}|K(x - x_0)|^{2^n}.$$