Dérivation

1 Exercices sur la dérivabilité

Exercice 1.

Calculer la dérivée, quand elle est définie, de :

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x+1}{x-1}\ln(x^2+3)\right).$$

(On ne cherchera pas à simplifier l'écriture de cette dérivée...)

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 3.

On considère une fonction f dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On définit g par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1/2], & g(x) = f(2x), \\ \forall x \in]1/2,1], & g(x) = f(2x-1). \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,1]$.
2. A quelle condition g est-elle dérivable sur $[0,1]$?

Exercice 4.

Si f est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer :

1. si f est paire, f' est impaire,
2. si f est impaire, f' est paire,
3. si f est T-périodique, f' est T-périodique.

Etudier les réciproques.

Exercice 5.

Calculer, à l'aide de la dérivation, les sommes suivantes, où $n \in \mathbb{N}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\cos(kx) \quad \text{et} \quad T_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Exercice 6.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en x_0, point intérieur à I.
Déterminer la limite de $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ lorsque $h \to 0$.

Exercice 7.

Soit f une fonction dérivable en x_0. Déterminer la limite éventuelle, quand $x \to x_0$, de :

$$\frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}.$$

Exercice 8.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ dérivable vérifiant $f \circ f = f$.

1. Soit $[m, M] = f([0,1])$. Vérifier que $\forall x \in [m, M],\ f(x) = x$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que si f n'est pas constante, $M = 1$ et $m = 0$.
3. Conclure : trouver toutes les $f : [0,1] \to [0,1]$ dérivables telles que $f \circ f = f$.

Exercice 9.

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \frac{1}{2}x + 3.$$

Indication : on pourra calculer de deux façons différentes $f \circ f \circ f(x)$.

2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 10.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ admet au plus trois solutions.

Exercice 11.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application 2 fois dérivable vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a,b[$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(c) = \dfrac{(c-a)(c-b)}{2} f''(\alpha)$
(Utiliser l'application $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - A\dfrac{(x-a)(x-b)}{2}$, A étant choisi de sorte que $g(c) = 0$).

Exercice 12.

Soit f une fonction dérivable du segment $[a,b]$ (avec $a < b$) dans $\mathbb{R}$. On suppose :
- $\forall x \in [a,b],\ f'(x) \leq M$,
- $f(b) - f(a) = M(b-a)$.

Montrer que f est affine (on pourra étudier $g(x) = f(x) - M(x-a)$).

Exercice 13. *Théorème de Darboux*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, i.e pour tout intervalle $I \subset [a,b]$, $f'(I)$ est un intervalle.

Exercice 14.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable à dérivée bornée. On suppose que $f(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 15.

Etudier les variations des fonctions suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln x}{x} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^x \end{array}$$

Exercice 16.

Soient $f \in \mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$ et :

$$g \ : \ x \in [-1,1] \quad \mapsto \quad \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ f'(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$.

Exercice 17. *Généralisation du théorème de Rolle*

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable sur $]a,+\infty[$ et telle que $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to +\infty$.
Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
(On pourra utiliser $g : [\arctan(a), \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R},\ t \mapsto f(\tan(t))$, mais ce n'est pas indispensable).

3 Dérivées n-ièmes

Exercice 18. *Zéros de la dérivée n-ième*

Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $n \geq 1$. On suppose que f s'annule en au moins p points distincts de $\mathbb{R}$ avec $p \geq n+1$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins $p-n$ points distincts de $\mathbb{R}$.

Exercice 19. *Leibniz*

Calculer les dérivées $n$ième de $f : x \mapsto x^2 \sin x$ et $g : x \mapsto e^x \cos x$.

Exercice 20. *Dérivées n-ièmes par récurrence*

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}\ln x\right) = \frac{(n-1)!}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{1/x}\right) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{1/x}.$$

Exercice 21. *Application $\mathcal{C}^\infty$ avec toutes ses dérivées nulles*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

1. Prouver l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,+\infty[, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}.$$
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $g(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ et $g(x) = 1$ si $|x| \leq 1$.

Exercice 22.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que :
$$\forall x \in [0,1], \qquad \left|f(x) - xf'(0)\right| \leq Mx^2.$$
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$
Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$
Etudier (v_n) et (w_n).

Exercice 23. *Inégalité de Landau*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f''(x)\right|.$$

1. Montrer, si $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, que :
$$\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{t}M_0 + \frac{t}{2}M_2.$$
2. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. On pose :
$$M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f'(x)\right|.$$
Montrer que : ${M_1}^2 \leq 2M_0M_2$.

4 Points fixes attractifs de suites récurrentes

Exercice 24.

Soit f une fonction définie sur $[0,4]$ par $f(x) = \sqrt{4+x}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0,4]$ est stable par f, et que f admet un unique point fixe α sur $[0,4]$ que l'on calculera.
2. La suite (u_n) est définie par
$$u_0 \in [0,4] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Montrer que si $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \ \leq \ \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
Qu'en déduit-on sur le comportement de (u_n) ?

Exercice 25. *Valeur approchée de* $\ln 2$

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par

$$g(x) = (x-2)e^{2x} + (x+2)e^x, \ f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Démontrer que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $f'(0)$?
3. Vérifier que $f''(x) = \frac{g(x)}{(e^x-1)^3}$. En déduire que $|f'(x)| \leq 1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2.$$

Exercice 26.

On considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{x}$.

1. Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*)$, et montrer que I est stable par f.
2. Étudier la suite (u_n).