Devoir à la maison

1 Carrés magiques d'ordre 3.

Un carré est magique lorsque la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale est identique. Cette somme est appelée **densité** du carré magique. L'ordre du carré correspond au nombre d'éléments d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale. Un carré d'ordre 3 contient huit rangées de trois éléments (3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales). Le **médian** est l'élément du centre. Voici quelques exemples de tels carrés :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

10	2	9
6	7	8
5	12	4

23	2	17
8	14	20
11	26	5

1. On considère les carrés de nombres suivant où x, y et z sont des nombres réels :

a)

2z	x+1	3y+7
5x-1	4y+1	z+7
3y+1	2z+3	2x+2

b)

x+1	y	z
2x	2y	2z
3x	3y	3z

   Déterminer, pour chacun de ces deux carrés, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que le carré soit magique.

2. On souhaite maintenant décrire l'ensemble de tous les carrés magiques d'ordre 3, on considère donc le carré suivant où a, b, c, d, e, f, g et h et i sont des inconnues réelles :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

.

   (a) Écrire un système d'équations vérifiées par les inconnues si et seulement si le carré est magique.
   (b) Ecrire la matrice du système précédent, puis sa forme échelonnée réduite.
   (c) Préciser le rang du système, le nombre d'inconnues paramètres puis l'ensemble de ses solutions.
   (d) Prouver enfin que dans un carré magique d'ordre 3, la densité est le triple du médian.

2 Puissances d'une matrice

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. <u>Une première méthode de calcul de M^n.</u>
   Soit la matrice $A = \frac{1}{4}(M - I)$.

(a) Calculer A^2, A^3 puis en déduire une expression simple de A^n pour tout entier $n \geq 1$.

(b) Exprimer M en fonction de A et I, puis en déduire qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = I + u_n A.$$

(c) Vérifier que la suite u est arithmético-géométrique. Calculer u_n en fonction de n.
En déduire l'expression de M^n pour $n \geq 0$.

(d) Justifier que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}.
Vérifier que l'expression trouvée à la question précédente est encore valable avec $n = -1$.

2. Une seconde méthode de calcul de M^n.
On définit la matrice $J = \frac{1}{4}(M + 3I)$.

(a) Calculer J^2 puis J^n pour tout entier naturel non nul n.
La matrice J est elle inversible ?

(b) Pour tout entier naturel n non nul : déterminer une expression de M^n en fonction de n, I et J. Comparer ce résultat à celui obtenu à la question 1.c).