

Corrigé du devoir à la maison

Ce devoir à la maison est l'occasion de découvrir quelques applications majeures du théorème des accroissements finis et des développements limités à l'étude asymptotique des suites récurrentes.

1 Points fixes attractifs et répulsifs

Dans cette partie, \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels et I est un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point. On considère une fonction $f : I \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 .

Pour $x \in I$, on notera $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Soit $x_0 \in I$ tel que I contienne un voisinage de x_0 et $f(x_0) = x_0$. On dit alors que x_0 est un point fixe de f . En particulier, la suite $(u_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à x_0 .

1. Lorsque x_0 est un point fixe de f et que $|f'(x_0)| < 1$, on dit que x_0 est un point fixe attractif.

(a) Si x_0 est un point fixe attractif de f , montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 < k < 1$ tels que :

$$\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], |f'(x)| \leq k.$$

La fonction $x \mapsto |f'(x)|$ est continue puisque f' l'est.

On a donc $\lim_{x \rightarrow x_0} |f'(x)| = |f'(x_0)| < 1$ et l'on peut choisir $\epsilon = \frac{1-|f'(x_0)|}{2}$: on a alors par définition de la limite un nombre $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \subset I$ et $\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], |f'(x_0)| - \epsilon < |f'(x)| < |f'(x_0)| + \epsilon$. En particulier, en remplaçant ϵ par sa valeur, on obtient : $|f'(x)| < \frac{1+|f'(x_0)|}{2}$ donc on a bien $k = \frac{1+|f'(x_0)|}{2} < 1$ et $\alpha > 0$ vérifiant ce qui est demandé dans l'énoncé.

(b) Avec les notations de la question précédente, montrer que l'on a alors pour tout $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ et $n \in \mathbb{N}$: $|u_n(x) - x_0| \leq k^n |x - x_0|$.

On montre ce résultat par récurrence sur n . Pour $n = 0$, cette inégalité est une égalité et est vérifiée. Supposons qu'elle est vraie au rang n . On a alors $|u_n(x) - x_0| \leq k^n |x - x_0| \leq |x - x_0|$ donc $u_n(x) \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre x_0 et $u_n(x)$: on a donc $\left| \frac{f(u_n(x)) - f(x_0)}{u_n(x) - x_0} \right| \leq k$ et donc $|u_{n+1}(x) - x_0| \leq k |u_n(x) - x_0| \leq k \cdot k^n |x - x_0|$. Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On voit donc que la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 lorsque $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ parce que la suite géométrique de raison $k < 1$ tend vers 0, expliquant le caractère attractif du point fixe x_0 .

2. Lorsque x_0 est un point fixe de f et que $|f'(x_0)| > 1$, on dit que x_0 est un point fixe répulsif.

- (a) Si x_0 est un point fixe répulsif de f , montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $k > 1$ tels que :

$$\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], |f'(x)| \geq k.$$

Ici, il faut reproduire le raisonnement de la question 1.(a) avec $\epsilon = \frac{|f'(x_0)|-1}{2}$ et l'on a ainsi un intervalle $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \subset I$ tel que $\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], |f'(x_0)| - \epsilon < |f'(x)| < |f'(x_0)| + \epsilon$. En particulier, en remplaçant ϵ par sa valeur, on obtient : $1 < \frac{1+|f'(x_0)|}{2} < |f'(x)|$ donc on a bien $k = \frac{1+|f'(x_0)|}{2} > 1$ et $\alpha > 0$ vérifiant ce qui est demandé dans l'énoncé.

- (b) Montrer qu'une suite $u_n(x)$ ne peut alors converger vers x_0 que si elle est constante et égale à x_0 à partir d'un certain rang.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x \in I$ tel que $u_n(x) \rightarrow x_0$ et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq x_0$. A partir d'un certain rang N , on a pour $n \geq N$, $u_n(x) \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$. On montre alors par récurrence que $|u_n(x) - x_0| \geq k^{n-N}|u_N(x) - x_0|$ pour $n \geq N$, où $k > 1$. Ceci est en contradiction avec la convergence de $u_n(x)$ vers x_0 si $u_N(x) \neq x_0$. Ainsi, une suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers x_0 est constante à partir d'un certain rang.

2 La méthode de Newton

Soit g de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I . On suppose que l'équation $g(x) = 0$ a une solution x_0 à l'intérieur de l'intervalle I , dont on ne connaît pas la valeur exacte. La méthode de Newton consiste, partant d'une valeur u_0 proche de x_0 , à tracer la tangente à la courbe de g en le point d'abscisse $x = u_0$. Cette tangente à \mathcal{C}_g en le point d'abscisse u_0 croise l'axe des abscisses en un point u_1 à condition que $g'(u_0) \neq 0$, et l'on peut recommencer le même processus en remplaçant u_0 par u_1 .

1. Exprimons en fonction de u_0 , de g et de g' l'équation de la tangente à \mathcal{C}_g en le point d'abscisse $x = u_0$:

$$y - g(u_0) = (x - u_0)g'(u_0)$$

2. Le point d'intersection u_1 avec les abscisses de la tangente vérifie donc :

$$\begin{aligned} -g(u_0) &= (u_1 - u_0)g'(u_0) \\ u_1 &= u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)} \end{aligned}$$

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

3. Si $g'(x_0) \neq 0$, cette fonction f est bien définie sur un voisinage $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ de x_0 où g' ne s'annule pas (encore une fois, il suffit de poser $\epsilon = \frac{|g'(x_0)|}{2}$ et appliquer la continuité de g' en x_0). Comme g est de classe \mathcal{C}^2 , f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, elle est dérivable de dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{g'^2(x) - g(x)g''(x)}{g'^2(x)} \\ f''(x) &= \frac{g(x)g''(x)}{g'^2(x)} \end{aligned}$$

En particulier, on a $f'(x_0) = 0$ puisque $g(x_0) = 0$, et x_0 est donc un point fixe attractif de f .

4. La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ainsi vers x_0 pour tout x dans un intervalle ouvert centré sur x_0 d'après la question 1 de la partie 1.

3 Vitesse de convergence vers un point fixe super-attractif

On reprend dans cette dernière partie les notations et hypothèses de la première partie, et l'on suppose que x_0 est un point fixe super-attractif de f , c'est à dire que $f(x_0) = x_0$ et $f'(x_0) = 0$.

1. Le but de cette question est de montrer que si $q > 0$ et que $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$, on aura à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq N$, $|u_n(x) - x_0| \leq q^n$

- (a) Par continuité de la fonction f' en x_0 , on a pour $\epsilon = \frac{q}{2}$ un intervalle $[x_0 - \beta; x_0 + \beta]$ où $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \beta; x_0 + \beta], |f'(x)| \leq \frac{q}{2}.$$

- (b) On a alors d'après la question 1.b de la première partie :

$$|u_n(x) - x_0| \leq |x - x_0| \left(\frac{q}{2}\right)^n = \frac{|x - x_0|}{2^n} q^n.$$

On choisit alors N de sorte que $|x - x_0| \leq 2^N$ et l'on obtient ainsi le résultat attendu.

2. Dans cette question, on suppose que f admet un développement limité d'ordre 2 en le point x_0 .

- (a) Puisque f est dérivable de dérivée nulle en x_0 et qu'elle admet un $DL_2(x_0)$, ce développement limité est de la forme :

$$f(x) =_{x \rightarrow x_0} x_0 + a(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\frac{f(x) - x_0}{(x - x_0)^2} =_{x \rightarrow x_0} a + o(1)$$

On pose alors $\epsilon = 1$ dans la définition de la limite, sachant que $\frac{f(x) - x_0}{(x - x_0)^2}$ a pour limite a en le point x_0 . On a alors pour $K = |a| + 1 > 0$, un nombre $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta], |f(x) - x_0| \leq K|x - x_0|^2$$

Si l'on choisit $\gamma = \min\{\delta, \frac{1}{K}\}$, on a finalement :

$$\forall x \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma], |f(x) - x_0| \leq K|x - x_0|^2 \leq |x - x_0|.$$

- (b) Montrons par récurrence que l'on a pour tout $x \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]$, $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(x) \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma] \text{ et } |u_n(x) - x_0| \leq \frac{1}{K} |K(x - x_0)|^{2^n}.$$

Pour $n = 0$, le résultat est évident. Admettons le résultat au rang n et appliquons le résultat de la question précédente puisque $u_n(x) \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]$:

$$|f(u_n(x)) - x_0| \leq K|u_n(x) - x_0|^2 \leq |u_n(x) - x_0|$$

$$|u_{n+1}(x) - x_0| \leq K \left(\frac{1}{K} |K(x - x_0)|^{2^n}\right)^2 \leq |u_n(x) - x_0|$$

$$|u_{n+1}(x) - x_0| \leq \frac{1}{K} |K(x - x_0)|^{2^{n+1}} \leq |u_n(x) - x_0|$$

Ce qui prouve bien que $u_{n+1}(x_0) \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]$ et l'inégalité souhaitée au rang $n + 1$.