

## Corrigé du devoir à la maison

Ce devoir à la maison est l'occasion de découvrir quelques applications majeures du théorème des accroissements finis et des développements limités à l'étude asymptotique des suites récurrentes.

### 1 Points fixes attractifs et répulsifs

Dans cette partie,  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels et  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point. On considère une fonction  $f : I \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour  $x \in I$ , on notera  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Soit  $x_0 \in I$  tel que  $I$  contienne un voisinage de  $x_0$  et  $f(x_0) = x_0$ . On dit alors que  $x_0$  est un point fixe de  $f$ . En particulier, la suite  $(u_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $x_0$ .

1. Lorsque  $x_0$  est un point fixe de  $f$  et que  $|f'(x_0)| < 1$ , on dit que  $x_0$  est un point fixe attractif.

- (a) Si  $x_0$  est un point fixe attractif de  $f$ , montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  et  $0 < k < 1$  tels que :

$$\forall x \in ]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[, |f'(x)| \leq k.$$

La fonction  $x \mapsto |f'(x)|$  est continue puisque  $f'$  l'est.

On a donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f'(x)| = |f'(x_0)| < 1$  et l'on peut choisir  $\epsilon = \frac{1 - |f'(x_0)|}{2}$  : on a alors par définition de la limite un nombre  $\alpha > 0$  tel que  $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \subset I$  et  $\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ ,  $|f'(x_0)| - \epsilon < |f'(x)| < |f'(x_0)| + \epsilon$ . En particulier, en remplaçant  $\epsilon$  par sa valeur, on obtient :  $|f'(x)| < \frac{1 + |f'(x_0)|}{2}$  donc on a bien  $k = \frac{1 + |f'(x_0)|}{2} < 1$  et  $\alpha > 0$  vérifiant ce qui est demandé dans l'énoncé.

- (b) Avec les notations de la question précédente, montrer que l'on a alors pour tout  $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$  et  $n \in \mathbb{N}$  :  $|u_n(x) - x_0| \leq k^n |x - x_0|$ .

On montre ce résultat par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , cette inégalité est une égalité et est vérifiée. Supposons qu'elle est vraie au rang  $n$ . On a alors  $|u_n(x) - x_0| \leq k^n |x - x_0| \leq |x - x_0|$  donc  $u_n(x) \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$  et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à  $f$  entre  $x_0$  et  $u_n(x)$  : on a donc  $\left| \frac{f(u_n(x)) - f(x_0)}{u_n(x) - x_0} \right| \leq k$  et donc  $|u_{n+1}(x) - x_0| \leq k |u_n(x) - x_0| \leq k \cdot k^n |x - x_0|$ . Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- (c) On voit donc que la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x_0$  lorsque  $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$  parce que la suite géométrique de raison  $k < 1$  tend vers 0, expliquant le caractère attractif du point fixe  $x_0$ .

2. Lorsque  $x_0$  est un point fixe de  $f$  et que  $|f'(x_0)| > 1$ , on dit que  $x_0$  est un point fixe répulsif.

- (a) Si  $x_0$  est un point fixe répulsif de  $f$ , montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  et  $k > 1$  tels que :

$$\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], |f'(x)| \geq k.$$

Ici, il faut reproduire le raisonnement de la question 1.(a) avec  $\epsilon = \frac{|f'(x_0)|-1}{2}$  et l'on a ainsi un intervalle  $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha] \subset I$  tel que  $\forall x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], |f'(x_0)| - \epsilon < |f'(x)| < |f'(x_0)| + \epsilon$ . En particulier, en remplaçant  $\epsilon$  par sa valeur, on obtient :  $1 < \frac{1+|f'(x_0)|}{2} < |f'(x)|$  donc on a bien  $k = \frac{1+|f'(x_0)|}{2} > 1$  et  $\alpha > 0$  vérifiant ce qui est demandé dans l'énoncé.

- (b) Montrer qu'une suite  $u_n(x)$  ne peut alors converger vers  $x_0$  que si elle est constante et égale à  $x_0$  à partir d'un certain rang.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe  $x \in I$  tel que  $u_n(x) \rightarrow x_0$  et tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n(x) \neq x_0$ . A partir d'un certain rang  $N$ , on a pour  $n \geq N$ ,  $u_n(x) \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ . On montre alors par récurrence que  $|u_n(x) - x_0| \geq k^{n-N}|u_N(x) - x_0|$  pour  $n \geq N$ , où  $k > 1$ . Ceci est en contradiction avec la convergence de  $u_n(x)$  vers  $x_0$  si  $u_N(x) \neq x_0$ . Ainsi, une suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $x_0$  est constante à partir d'un certain rang.

## 2 La méthode de Newton

Soit  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$ . On suppose que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution  $x_0$  à l'intérieur de l'intervalle  $I$ , dont on ne connaît pas la valeur exacte. La méthode de Newton consiste, partant d'une valeur  $u_0$  proche de  $x_0$ , à tracer la tangente à la courbe de  $g$  en le point d'abscisse  $x = u_0$ . Cette tangente à  $\mathcal{C}_g$  en le point d'abscisse  $u_0$  croise l'axe des abscisses en un point  $u_1$  à condition que  $g'(u_0) \neq 0$ , et l'on peut recommencer le même processus en remplaçant  $u_0$  par  $u_1$ .

1. Exprimons en fonction de  $u_0$ , de  $g$  et de  $g'$  l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  en le point d'abscisse  $x = u_0$  :

$$y - g(u_0) = (x - u_0)g'(u_0)$$

2. Le point d'intersection  $u_1$  avec les abscisses de la tangente vérifie donc :

$$-g(u_0) = (u_1 - u_0)g'(u_0)$$

$$u_1 = u_0 - \frac{g(u_0)}{g'(u_0)}$$

Soit  $f$  la fonction définie par

$$f : x \mapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

3. Si  $g'(x_0) \neq 0$ , cette fonction  $f$  est bien définie sur un voisinage  $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$  de  $x_0$  où  $g'$  ne s'annule pas (encore une fois, il suffit de poser  $\epsilon = \frac{|g'(x_0)|}{2}$  et appliquer la continuité de  $g'$  en  $x_0$ ). Comme  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intervalle  $[x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ , elle est dérivable de dérivée :

$$f'(x) = 1 - \frac{g'^2(x) - g(x)g''(x)}{g'^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)g''(x)}{g'^2(x)}$$

En particulier, on a  $f'(x_0) = 0$  puisque  $g(x_0) = 0$ , et  $x_0$  est donc un point fixe attractif de  $f$ .

4. La suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge ainsi vers  $x_0$  pour tout  $x$  dans un intervalle ouvert centré sur  $x_0$  d'après la question 1 de la partie 1.

### 3 Vitesse de convergence vers un point fixe super-attractif

On reprend dans cette dernière partie les notations et hypothèses de la première partie, et l'on suppose que  $x_0$  est un point fixe super-attractif de  $f$ , c'est à dire que  $f(x_0) = x_0$  et  $f'(x_0) = 0$ .

1. Le but de cette question est de montrer que si  $q > 0$  et que  $x \in [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ , on aura à partir d'un certain rang  $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n(x) - x_0| \leq q^n$
- (a) Par continuité de la fonction  $f'$  en  $x_0$ , on a pour  $\epsilon = \frac{q}{2}$  un intervalle  $[x_0 - \beta; x_0 + \beta]$  où  $\beta > 0$  tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \beta; x_0 + \beta], |f'(x)| \leq \frac{q}{2}.$$

- (b) On a alors d'après la question 1.b de la première partie :

$$|u_n(x) - x_0| \leq |x - x_0| \left(\frac{q}{2}\right)^n = \frac{|x - x_0|}{2^n} q^n.$$

On choisit alors  $N$  de sorte que  $|x - x_0| \leq 2^N$  et l'on obtient ainsi le résultat attendu.

2. Dans cette question, on suppose que  $f$  admet un développement limité d'ordre 2 en le point  $x_0$ .
- (a) Puisque  $f$  est dérivable de dérivée nulle en  $x_0$  et qu'elle admet un  $DL_2(x_0)$ , ce développement limité est de la forme :

$$f(x) =_{x \rightarrow x_0} x_0 + a(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$$\frac{f(x) - x_0}{(x - x_0)^2} =_{x \rightarrow x_0} a + o(1)$$

On pose alors  $\epsilon = 1$  dans la définition de la limite, sachant que  $\frac{f(x) - x_0}{(x - x_0)^2}$  a pour limite  $a$  en le point  $x_0$ . On a alors pour  $K = |a| + 1 > 0$ , un nombre  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta], |f(x) - x_0| \leq K|x - x_0|^2$$

Si l'on choisit  $\gamma = \min\{\delta, \frac{1}{K}\}$ , on a finalement :

$$\forall x \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma], |f(x) - x_0| \leq K|x - x_0|^2 \leq |x - x_0|.$$

- (b) Montrons par récurrence que l'on a pour tout  $x \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n(x) \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma] \text{ et } |u_n(x) - x_0| \leq \frac{1}{K}|K(x - x_0)|^{2^n}.$$

Pour  $n = 0$ , le résultat est évident. Admettons le résultat au rang  $n$  et appliquons le résultat de la question précédente puisque  $u_n(x) \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]$  :

$$|f(u_n(x)) - x_0| \leq K|u_n(x) - x_0|^2 \leq |u_n(x) - x_0|$$

$$|u_{n+1}(x) - x_0| \leq K \left( \frac{1}{K} |K(x - x_0)|^{2^n} \right)^2 \leq |u_n(x) - x_0|$$

$$|u_{n+1}(x) - x_0| \leq \frac{1}{K} |K(x - x_0)|^{2^{n+1}} \leq |u_n(x) - x_0|$$

Ce qui prouve bien que  $u_{n+1}(x) \in [x_0 - \gamma; x_0 + \gamma]$  et l'inégalité souhaitée au rang  $n + 1$ .