Programme des colles du 16/02 au 20/02

1. Matrices et systèmes linéaires
   - Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
   - Opérations sur les matrices : combinaison linéaire, multiplication matricielle.
   - Matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $E_{i,j}$ est la matrice avec un 1 ligne i, colonne j, qui est le seul élément non nul de la matrice.
   - Propriétés du produit matriciel : associativité et double distributivité.
   - Symbole de Kronecker et produit de matrices élémentaires.
   - Transposée d'une matrice. Notation A^T.
   - Opérations et transposées : transposée d'une combinaison linéaire, d'un produit.
   - Opérations élémentaires et matrices : matrices de dilatation, de transposition et de transvection, lien entre les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice avec ces matrices.
   - Systèmes linéaires
   - Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire.
   - Puissances d'une matrice carrée.
   - Formule du binôme
   - Matrices diagonales, triangulaires. Stabilité par les opérations.
   - Matrices carrées inversibles. Inverse.
   - Inverse d'un produit de matrices inversibles.
   - **Calcul de l'inverse d'une matrice carrée en faisant les mêmes opérations sur la matrice et sur une autre qui est au départ la matrice identité. Lien avec la résolution du système linéaire.**
2. Polynômes
   - L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.
   - Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.
   - Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
   - Opérations sur les polynômes : somme, produit, composition.
   - Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée.
   - Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $K[X] \setminus \{0\}$.
   - **Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$.**

     Généralisation : Si $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P, alors $\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \big| P$.

     Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.
   - Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P.
   - Multiplicité d'une racine : définition.
   - Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôme scindé dans le cas de racines multiples.
   - **Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.**
   - Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
   - Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$:

     $$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X - a)^k.$$
   - Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.