Devoir surveillé

Exercice 1. *Cours*

1. Enoncer le lemme de Rolle.
2. Enoncer le théorème des accroissements finis.
3. Si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, on a vu que $(fg) \in \mathcal{C}^n(I)$. Préciser ce point en rappelant la formule (de Leibniz) qui donne $(fg)^{(n)}$ en fonction des dérivées de f et de g.
4. Qu'est-ce que le symbole de Kronecker ?
5. Qu'appelle-t-on les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$?
6. Rappeler ce que sont les matrices de dilatation, de transposition et de transvection ainsi que leur lien avec les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice.

Exercice 2. *Suite récurrente et fonction contractante.*

Soit f une fonction définie sur $[0, 4]$ par $f(x) = \sqrt{4 + x}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0, 4]$ est stable par f, et que f admet un unique point fixe α sur $[0, 4]$ que l'on calculera.
2. Etudier les variations de f' et justifier que $|f'|$ est majorée par $\frac{1}{4}$.
3. La suite (u_n) est définie par
$$u_0 \in [0, 4] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Montrer que si $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
Qu'en déduit-on sur le comportement de (u_n) ?

Exercice 3. *Inverse et puissances d'une matrice*

1. Si $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifier que $CD = DC$ et calculer en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$: C^p et D^p.
2. On note $E = C + D$, calculer E^p en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que E est inversible, préciser son inverse.
4. Calculer E^{-p} en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. *Puissances d'une autre matrice.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $B = A - I_3$, calculer B^2 et B^3.
2. Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$.
3. Par exemple à l'aide de la formule du binôme (justifier son utilisation), donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Exercice 5. *Matrices et suites récurrentes*

On considère les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit PQ. En déduire l'expression de l'inverse de P noté P^{-1}.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale que l'on calculera et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, D^n.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$
5. On pose $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et on définit par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -a_n + c_n \\ c_{n+1} &= -a_n - b_n + 2c_n \end{cases}$$
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n la matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :
$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ puis que $U_n = A^nU_0$.
6. En déduire l'expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.