Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Cours*

1. Enoncer le lemme de Rolle.
   Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, que f est dérivable sur $]a,b[$ et que $f(a) = f(b)$, alors on a un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Enoncer le théorème des accroissements finis.
   Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et que f est dérivable sur $]a,b[$ et que $f(a) = f(b)$, alors on a un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
3. Si $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$, on a vu que $(fg) \in \mathcal{C}^n(I)$. Préciser ce point en rappelant la formule (de Leibniz) qui donne $(fg)^{(n)}$ en fonction des dérivées de f et de g.
   $$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
4. Qu'est-ce que le symbole de Kronecker ?
   Ce symbole est $\delta_{i,j}$, il vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
5. Qu'appelle-t-on les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$?
6. Les matrices de transposition, de dilatation et de transvection sont appelées **matrices élémentaires**. Elles correspondent exactement aux **opérations élémentaires sur les lignes** d'une matrice.
   Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Multiplier A à gauche par une matrice élémentaire revient à effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A.
   (a) **Matrice de transposition (ou permutation)**
   Pour $i \neq j$, la matrice de transposition $\mathcal{T}_{i,j}$ est obtenue en échangeant les lignes i et j de la matrice identité I_n.
   Elle correspond à l'opération élémentaire :
   $$L_i \longleftrightarrow L_j$$
   Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :
   $$\mathcal{T}_{i,j}A$$
   est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de A.
   (b) **Matrice de dilatation**
   Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, la matrice de dilatation $D_i(\lambda)$ est obtenue en multipliant par λ le coefficient diagonal (i,i) de I_n.
   Elle correspond à l'opération élémentaire :
   $$L_i \longleftarrow \lambda L_i$$
   Pour toute matrice A :
   $$D_i(\lambda)A$$
   est la matrice obtenue en multipliant la ligne i de A par λ.
   (c) **Matrice de transvection**
   Pour $i \neq j$ et $\mu \in \mathbb{K}$, la matrice de transvection $T_{i,j}(\mu)$ est obtenue en ajoutant μ en position (i,j) dans la matrice identité.
   Elle correspond à l'opération élémentaire :
   $$L_i \longleftarrow L_i + \mu L_j$$
   Ainsi,
   $$T_{i,j}(\mu)A$$
   est la matrice obtenue en ajoutant μ fois la ligne j à la ligne i de A.

Exercice 2. *Suite récurrente et fonction contractante.*

Soit f une fonction définie sur $[0,4]$ par $f(x)=\sqrt{4+x}$.

1. Montrer que l'intervalle $[0,4]$ est stable par f, et que f admet un unique point fixe α sur $[0,4]$ que l'on calculera.
   La fonction f est croissante et continue donc $[f(0),f(4)]=\left[2,\sqrt{8}\right]$. Puisque $\left[2,\sqrt{8}\right]\subset[0,4]$, l'intervalle $[0,4]$ est stable par f.
   On cherche à résoudre, pour $x\in[0,4]$, l'équation $\sqrt{4+x}=x$. Elle équivaut, puisque tout est positif pour x dans cet intervalle, à :
   $$4+x=x^2,$$
   $$x^2-x-4=0.$$
   Les deux solutions de cette équation du second degré dans $\mathbb{R}$ sont $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. L'unique solution dans l'intervalle considéré est donc $\alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.
2. On commence par remarquer que f est dérivable sur $[0,4]$, de dérivée $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$. Cette dérivée est à valeurs positives sur $[0,4]$ et décroissante. Ainsi, pour tout $x\in[0,4]$, on a :
   $$|f'(x)|\leq f'(0)=\frac{1}{4}.$$
3. La suite (u_n) est définie par
   $$u_0\in[0,4]\qquad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=f(u_n).$$
   Montrer que si $n\in\mathbb{N}$,
   $$|u_n-\alpha|\ \leq\ \left(\frac{1}{4}\right)^n|u_0-\alpha|.$$
   On déduit de la majoration de $|f'|$ que f est $\frac{1}{4}$-lipchitzienne sur $[0,4]$.
   On prouve alors le résultat demandé par récurrence sur n.
   Pour $n=0$, il est vrai.
   Supposons qu'il soit vérifié au rang n, on a alors puisque f est lipchitzienne :
   $$|f(u_n)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{4}\left|u_n-\alpha\right|.$$
   Ceci signifie :
   $$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}\left|u_n-\alpha\right|,$$
   d'où l'on déduit par hypothèse de récurrence :
   $$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n|u_0-\alpha|,$$
   $$|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}|u_0-\alpha|.$$
   Qu'en déduit-on sur le comportement de (u_n) ? (u_n) est donc convergente de limite α.

Exercice 3. *Inverse et puissances d'une matrice*

1. Si $C=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifier que $CD=DC$ et calculer en fonction de $p\in\mathbb{N}^*$: C^p et D^p.
   Comme $D=3I_3$, on a $CD=DC=3C$.
   La matrice D étant diagonale, on a $D^p=\begin{pmatrix}3^p&0&0\\0&3^p&0\\0&0&3^p\end{pmatrix}$ ou encore $D^p=3^pI_3$, cette formule étant aussi valable pour $p=0$.
   Concernant C, on remarque que $C^2=6C$ donc on prouve aisément par récurrence que l'on a pour tout $p\in\mathbb{N}^*$: $C^p=6^{p-1}C$.

2. On note $E = C + D$, calculer E^p en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule du binôme :

$$(C + D)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} C^k D^{p-k}$$

$$(C + D)^p = D^p + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 6^{k-1} C 3^{p-k} I_3$$

$$(C + D)^p = 3^p I_3 + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 6^{k-1} 3^{p-k} \right) C$$

$$(C + D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 6^k 3^{p-k} \right) C$$

$$(C + D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 6^k 3^{p-k} - 3^p \right) C$$

$$(C + D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left((6 + 3)^p - 3^p \right) C$$

$$(C + D)^p = 3^p I_3 + \frac{1}{6} \left(9^p - 3^p \right) C$$

Concrètement, cela donne : $E^p = \begin{pmatrix} \frac{9^p+5\times 3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} \\ \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p+5\times 3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} \\ \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p-3^p}{6} & \frac{9^p+5\times 3^p}{6} \end{pmatrix}$.

3. Montrer que E est inversible, préciser son inverse : on peut remarquer que la formule ci-dessus fonctionne aussi pour $p = 0$ et deviner qu'elle va fonctionner pour $p = -1$. Il reste alors simplement à vérifier que la matrice ainsi obtenue, $\frac{1}{3}I_3 - \frac{1}{27}C$, est bien l'inverse de $E = C + 3I_3$ en calculant : $\left(\frac{1}{3}I_3 - \frac{1}{27}C\right)(C + 3I_3) = \frac{1}{3}C + I_3 - \frac{1}{27}C^2 - \frac{1}{9}C = I_3 + (\frac{1}{3} - \frac{6}{27} - \frac{1}{9})C = I_3$.
   Finalement, E est inversible d'inverse $E^{-1} = \frac{1}{3}I_3 - \frac{1}{27}C$
4. Calculer E^{-p} en fonction de p pour $p \in \mathbb{N}^*$: il suffit de prouver par récurrence sur p que l'on a $E^{-p} = 3^{-p} I_3 + \dfrac{1}{6}\left(9^{-p} - 3^{-p}\right) C$.

Exercice 4. *Puissances d'une autre matrice.*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $B = A - I_3$, calculer B^2 et B^3.
   $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Exprimer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
2. Par exemple à l'aide de la formule du binôme (justifier son utilisation), donner une expression simple de A^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.
   On a $A = I_3 + B$ avec B et I_3 qui commutent puisque $I_3B = BI_3 = B$ donc :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k}.$$

   Comme pour $k \geq 3$, on a $B^k = 0$, on obtient :

$$A^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$

$$A^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2;$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 2n - \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Matrices et suites récurrentes*

On considère les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit PQ. En déduire l'expression de l'inverse de P noté P^{-1}.
   On remarque que $PQ = I_3$ donc P est inversible d'inverse $P^{-1} = Q$.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale que l'on calculera et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, D^n. Le calcul donne $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'on en déduit : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.
   Supposons la propriété vraie au rang n, on a donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Or on sait que $D = P^{-1}AP$ donc $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$. On en déduit :

   $$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

   Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On fait donc le calcul pour $n \in \mathbb{N}$:

   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

5. On pose $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et on définit par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$\begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + b_n - c_n \\ b_{n+1} &= -a_n + c_n \\ c_{n+1} &= -a_n - b_n + 2c_n \end{cases}$$

   On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n la matrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par :

   $$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ puis que $U_n = A^nU_0$.
   On remarque effectivement pour $n \in \mathbb{N}$ que l'on a :

   $$AU_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n - c_n \\ -a_n + c_n \\ -a_n - b_n + 2c_n \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

   Prouvons ensuite par récurrence que $U_n = A^nU_0$. Pour $n = 0$, c'est évident puisque $A^0 = I_3$. Prouvons l'hérédité, on suppose donc que $U_n = A^nU_0$, on a donc puisque $U_{n+1} = AU_n$:

   $$U_{n+1} = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0.$$

   Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie pour tout entier.
6. En déduire l'expression des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 1 - 2^n \\ 1 - 2^n & 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2 - 2^n \\ 2 - 2^n \end{pmatrix}.$$