
Programme des colles du 23/03 au 27/03

1. Polynômes

- Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.
- Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .
- Opérations sur les polynômes : somme, produit, composition.
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée.
- Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
- Racines $\alpha \in \mathbb{K}$ (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité par $X - \alpha$. Généralisation :
Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont racines de P , alors $\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k) \mid P$.
- Cas d'un polynôme scindé à racines simples, expression à l'aide du coefficient dominant et des racines.
- Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .
- Multiplicité d'une racine : définition.
- Généralisation des propriétés de divisibilité et de la définition de polynôme scindé dans le cas de racines multiples.
- Liens coefficients racines des polynômes scindés : Somme et produit des racines.
- Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$
- Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

- Multiplicité d'une racine : caractérisation par les dérivées successives.
- Théorème de d'Alembert-Gauss.
- Irréductibles et décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2. Espaces vectoriels.

- Définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- **Propriétés de calcul dans un e.v. : savoir prouver que** $0x = 0_E$ **si** $x \in E$, $\lambda 0_E = 0_E$ **si** $\lambda \in \mathbb{K}$ **et que** $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ **ou** $x = 0_E$.
- Définition d'un sous-espace vectoriel
- Espaces de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.
- Intersection de sous-espaces vectoriels.
- Union de sous-espaces vectoriels F et G : ce n'est un s.e.v. que lorsque $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- Somme de deux sous-espaces vectoriels.
- **Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection à savoir prouver.**
- Sous-espaces supplémentaires.
- Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice.
- Famille libre, famille liée.
- Bases et coordonnées.
- Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- Toute famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace engendré par n vecteurs est liée.
- Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E , alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E .
- Espaces de dimension finie, existence de bases et théorème de la base incomplète.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
- **Somme de deux sous-espaces : On suppose que** $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ **et** $(g_1, g_2, \dots, g_p)$ **sont respectivement une base de** F **et de** G
Savoir prouver que $F + G$ **est une somme directe si et seulement si la famille** $e = (f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p)$ **est libre, savoir (sans preuve) que** $F + G = E$ **si et seulement si** e **est génératrice, et donc que** F **et** G **sont supplémentaires si et seulement si** e **est une base.**
- Existence de supplémentaires, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
- Formule de Grassmann.