
Exercices d'analyse asymptotique

1 Equivalents

Exercice 1. *Equivalents ou pas ?*

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $x \sim_{x \rightarrow +\infty} x + 1$ | 2. $x^2 \sim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x$ | 3. $\ln(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \ln(10^6 x)$ |
| 4. $\exp(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x + 10^{-6})$ | 5. $\exp(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \exp(2x)$ | 6. $\ln(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1)$ |

Exercice 2. *Equivalents simples*

Donner un équivalent le plus simple possible de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ en $+\infty$.
2. $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \ln(7x^3 + 2x^2 + 1)$ en $+\infty$.
4. $\sin x$ lorsque $x \rightarrow 0$.
5. $\ln(1+x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
6. $e^x - 1$ lorsque $x \rightarrow 0$.
7. $m(x) = x^{\frac{1}{x}} - 1$ en $+\infty$.

2 Calculs de développements limités.

Exercice 3.

Calculer les développements limités suivants :

- | | |
|---|---|
| 1. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 | 2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0 |
| 3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0 | 4. $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0 |
| 5. $(x^3 + 1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 | 6. $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0 |

Exercice 4.

Calculer les développements limités suivants en 0.

- | | |
|---|---|
| 1. $\cos(x) - e^x$ à l'ordre 3 | 2. $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7$ à l'ordre 3 |
| 3. $\sqrt{1 + \sin(x)}$ à l'ordre 3 | 4. $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3 |
| 5. $(1+x)^x$ à l'ordre 4 | 6. $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4 |
| 7. $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ à l'ordre 2 | 8. $\frac{x \ln(1+x) - e^{x^2} + 1}{x^2}$ à l'ordre 2 |
| 9. $\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}$ à l'ordre 2 | 10. $(x+1)^{x^2+2x}$ à l'ordre 6 |

Exercice 5.

Calculer les développements limités suivants :

$$\begin{array}{ll} 1. \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en } 2 & 2. \frac{1}{1+x^2} \text{ à l'ordre 3 en } -2 \\ 3. e^{\cos x \ln x} \text{ à l'ordre 2 en } \frac{\pi}{3} & 4. (1+\cos x)^{\frac{1}{3}} \text{ à l'ordre 2 en } \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Exercice 6.

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{1}{1+x+x^2} \text{ à l'ordre 4 en } 0 & 2. \tan(x) \text{ à l'ordre 5 en } 0 \\ 3. \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1} \text{ à l'ordre 2 en } 0 & 4. \frac{\ln(1+x)}{\sin x} \text{ à l'ordre 3 en } 0. \end{array}$$

Exercice 7.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$.

1. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de F .
3. En déduire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .

Exercice 8.

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

Exercice 9.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que f admet une fonction réciproque sur $\mathbb{R}$.

Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0.

Exercice 10.

Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est une fonction dérivable sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.
3. On note g la fonction réciproque de f . Montrer que g possède un développement limité à l'ordre 2 au point 1 et calculer ce développement limité.
4. En déduire que le produit $t \cdot g(\frac{t}{t-1})$ a une limite finie, que l'on calculera, quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 11.

Calculer, à l'ordre 100, le DL de $\ln \left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!} \right)$.

3 Application au calcul de limites

Exercice 12.

En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x \ln(1 + 2x)}$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^3}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^3}$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} \right)$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos(x)}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3 - \sqrt[4]{2 + 80x^3 + 16x^4})$ |

Exercice 13.

Déterminer les constantes a , b , c pour que

$$\frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x} \text{ et } \frac{1}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{b}{x^2} - \frac{c}{x}$$

tendent vers une limite finie quand $x \rightarrow 0$.

4 Application au prolongement par continuité

Exercice 14.

On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.

Montrer qu'elle est prolongeable en fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On note $\tilde{f}$ cette fonction. Que vaut $\tilde{f}(0)$?

La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 15.

On considère la fonction définie pour $x \in]0, \pi[$ par

$$f(x) = \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{x^2}.$$

Déterminer le développement limité de $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ en 0 à l'ordre 4.

En déduire si la fonction f est prolongeable par continuité en 0.

Si c'est le cas, ce prolongement par continuité est-il de classe $\mathcal{C}^1$.

5 Application à l'étude locale des courbes représentatives de fonctions

Exercice 16.

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}(1-x) + 1$ et C_f la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Démontrer que le développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0 est :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3).$$

2. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de T par rapport à C_f au voisinage de ce point.
4. Dans un repère, tracer T et C_f .

Exercice 17.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 18.

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

$$\begin{array}{ll} 1. f(x) = \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}} & 2. g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ 3. h(x) = \frac{x+1}{1 + \exp(1/x)} & 4. u(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right) \end{array}$$

6 Développement asymptotique de suites implicites

Exercice 19.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = |x \sin x|$.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. On notera x_n cette solution.
2. Donner un équivalent simple de x_n
3. On note $y_n = x_n - n\pi$ de sorte que $x_n = n\pi + y_n$. Montrer que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est une suite convergente vers 0.
4. Donner un équivalent de y_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 20.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera u_n .
2. Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \ln n$.
4. En étudiant $v_n = u_n - \ln n$, montrer que

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$