

## Programme des colles du 30/03 au 03/04

1. Espaces vectoriels.
  - Définition d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
  - Propriétés de calcul dans un e.v.
  - Définition d'un sous-espace vectoriel
  - Espaces de référence :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ .
  - Intersection de sous-espaces vectoriels.
  - Union de sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  : ce n'est un s.e.v. que lorsque  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .
  - Somme de deux sous-espaces vectoriels.
  - **Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection.**
  - Sous-espaces supplémentaires.
  - Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice.
  - Famille libre, famille liée.
  - Bases et coordonnées.
  - Bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
  - Toute famille de  $n + 1$  vecteurs dans un espace engendré par  $n$  vecteurs est liée.
  - Si  $E$  est dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre, si et seulement si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ .
  - Espaces de dimension finie, existence de bases et théorème de la base incomplète.
  - Rang d'une famille de vecteurs.
  - Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
  - **Somme de deux sous-espaces : On suppose que  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  et  $(g_1, g_2, \dots, g_p)$  sont respectivement une base de  $F$  et de  $G$**   
**Savoir prouver que  $F + G$  est une somme directe si et seulement si la famille  $e = (f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p)$  est libre, savoir (sans preuve) que  $F + G = E$  si et seulement si  $e$  est génératrice, et donc que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires si et seulement si  $e$  est une base.**
  - Existence de supplémentaires, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
  - Formule de Grassmann.
2. Analyse asymptotique
  - Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
  - Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
  - Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.
  - $DL_0$  et limite de fonction,  $DL_1$  et dérivabilité en un point.
  - Lien entre régularité d'une fonction et développement limité.
  - Développement limité d'une primitive
  - **Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  en 0.**
  - Calcul de développements limités d'une somme, d'un produit, d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.