

Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. Factorisation d'un polynôme.

On cherche dans cet exercice à factoriser le polynôme suivant :

$$Q(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^3 + 2X^2 - X$$

1. Montrer que 1 est une racine de Q , préciser sa multiplicité. On calcule $Q(1) = 0$ donc 1 est racine de Q de multiplicité au moins 1. On calcule le polynôme dérivé :

$$Q'(X) = 6X^5 - 10X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 4X - 1.$$

On calcule $Q'(1) = 0$ donc 1 est racine de Q de multiplicité au moins 2. On calcule le second polynôme dérivé :

$$Q''(X) = 30X^4 - 40X^3 + 12X^2 - 6X + 4.$$

On calcule $Q''(1) = 0$ donc 1 est racine de Q de multiplicité au moins 3. On calcule le troisième polynôme dérivé :

$$Q^{(3)}(X) = 120X^3 - 120X^2 + 24X - 6.$$

On calcule $Q^{(3)}(1) = 18$. 1 est donc racine de multiplicité 3 de Q .

2. Donner une autre racine évidente de Q .

0 est évidemment racine de Q dont le terme constant est nul.

3. Factoriser Q au maximum dans $\mathbb{R}[X]$, puis $\mathbb{C}[X]$.

1 est racine de multiplicité 3 et 0 est racine de Q donc $(X-1)^3X \mid Q$. On réalise la division euclidienne de Q par $(X-1)^3X = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - X$ et l'on obtient :

$$Q(X) = (X-1)^3X(X^2 + X + 1).$$

Le discriminant de $X^2 + X + 1$ vaut $\Delta = -3$ donc ceci est la décomposition de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Les deux racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 + X + 1$ sont :

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \bar{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

On a donc $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-\bar{j})$ et l'on obtient la décomposition de Q dans $\mathbb{C}[X]$:

$$Q(X) = (X-1)^3X(X-j)(X-\bar{j})$$

Exercice 2. Une suite de Polynômes.

On note $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = x$ et telle que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x) = (n+1) \int_0^x f_n(t) dt + x \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt \right).$$

1. Calculer l'expression des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 .

$$f_1(x) = \int_0^x t dt + x \left(1 - \int_0^1 t dt \right);$$

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2} + x \left(1 - \frac{1}{2}\right);$$

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

On peut alors calculer f_2 :

$$f_2(x) = 2 \int_0^x \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} dt + x \left(1 - 2 \int_0^1 \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} dt\right);$$

$$f_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}.$$

On peut alors calculer f_3 :

$$f_3(x) = 3 \int_0^x \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}t dt + x \left(1 - 3 \int_0^1 \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}t dt\right);$$

$$f_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

On peut alors calculer f_4 :

$$f_4(x) = 4 \int_0^x \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4} dt + x \left(1 - 4 \int_0^1 \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4} dt\right);$$

$$f_4(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est la fonction associée à un unique polynôme réel que l'on notera P_n .

D'après la question précédente, c'est vrai pour $n = 1, 2, 3$ ou 4 . Supposons que c'est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

où $(a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On en déduit si $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}(x) = (n+1) \int_0^x a_d t^d + a_{d-1} t^{d-1} + \dots + a_1 t + a_0 dt + x \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt\right).$$

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{d+1} a_d x^{d+1} + \frac{n+1}{d} a_{d-1} x^d + \dots + \frac{n+1}{2} a_1 x^2 + \left((n+1)a_0 + 1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt\right) x.$$

Ceci est bien l'expression d'une fonction polynôme, donc la propriété est héréditaire et la fonction f_n est une fonction polynomiale pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n vérifie les deux conditions suivantes :

$$P_n(0) = 0 \text{ et } P_n(X) - P_n(X-1) = X^n.$$

On prouve encore une fois cette propriété par récurrence. Puisque P_n est le polynôme dont la fonction associée est f_n , il suffit de vérifier que :

$$f_n(0) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) - f_n(x-1) = x^n.$$

Au rang $n = 0$, les deux aspects de cette propriété sont bien vrais. Supposons donc que c'est le cas au rang $n \in \mathbb{N}$, et calculons :

$$f_{n+1}(0) = (n+1) \int_0^0 f_n(t) dt + 0 \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt\right) = 0.$$

$$f_{n+1}(x) - f_{n+1}(x-1) = (n+1) \int_0^x f_n(t) dt + x \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt \right) - (n+1) \int_0^{x-1} f_n(t) dt - (x-1) \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt \right); \quad (1)$$

$$f_{n+1}(x) - f_{n+1}(x-1) = (n+1) \int_{x-1}^x f_n(t) dt + \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt \right);$$

$$f_{n+1}(x) - f_{n+1}(x-1) = (n+1) \int_{x-1}^x f_n(t) dt + \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt \right).$$

Notant alors $F_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - f_{n+1}(x-1)$, on observe que F_{n+1} est dérivable, de dérivée :

$$F'_{n+1}(x) = (n+1) (f_n(x) - f_n(x-1));$$

$$F'_{n+1}(x) = (n+1) (f_n(x) - f_n(x-1));$$

d'où l'on déduit d'après l'hypothèse de récurrence :

$$F'_{n+1}(x) = (n+1)x^n.$$

Ainsi, on a une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $F_{n+1}(x) = x^{n+1} + c$. On calcule alors $F_{n+1}(1) = 1$, donc $c = 0$ et l'hypothèse de récurrence est héréditaire.

4. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les deux conditions de la question précédente.

Notons R_n un polynôme qui vérifie ces conditions, puis prouvons par récurrence sur k que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n(k) = R_n(k)$.

Pour $k = 0$, on a bien $P_n(0) = R_n(0) = 0$.

Admettons que la propriété est vraie au rang k , on écrit alors les égalités vérifiées par P_n et Q_n pour $X = k+1$:

$$P_n(k+1) - P_n(k) = (k+1)^n \text{ et } R_n(k+1) - R_n(k) = (k+1)^n,$$

d'où l'on déduit naturellement avec l'hypothèse de récurrence que $P_n(k+1) = R_n(k+1)$.

L'hypothèse est héréditaire, donc le polynôme $P_n - R_n$ a pour racine tout entier naturel k . On en déduit que c'est le polynôme nul, c'est à dire que $P_n = R_n$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par $X^2 + X$.

Il suffit de vérifier que -1 et 0 sont racines de P_n : $P_n(0) = f_n(0) = 0$ et $P_n(0) - P_n(-1) = 0^n = 0$ donc $P_n(-1) = 0$.

Factoriser les polynômes P_1 , P_2 et P_3 . Écrire P_4 sous la forme $X(X+1)Q_4$ où $Q_4 \in \mathbb{R}[X]$.

$$P_1 = \frac{1}{2}X(X+1)$$

$$P_2 = \frac{1}{3}X(X+1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$$

$$P_3 = \frac{1}{4}X^2(X+1)^2$$

$$P_4 = \frac{1}{30}X(X+1)(6X^3 + 9X^2 + X - 1)$$

6. Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$, calculer son coefficient dominant ainsi que le coefficient de X^n .

La récurrence de la question 2 nous garantit que le degré augmente de 1 entre P_n et P_{n+1} , donc comme P_0 est de degré 1, on en déduit que P_n est de degré $n+1$.

Le coefficient dominant de P_n , si on le note b_n , vérifie d'après cette même récurrence : $b_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}b_n$. Sachant que $b_0 = 1$, on en déduit $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{3}$ et on prouve aisément : $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Pour $n \geq 1$, le coefficient de degré n de P_{n+1} est quant à lui le même que celui de P_n , c'est à dire $\frac{1}{2}$.

7. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a par somme télescopique :

$$P_n(p) = P_n(0) + \sum_{k=1}^p P_n(k) - P_n(k-1);$$

$$P_n(p) = \sum_{k=1}^p k^n.$$

Exercice 3. Familles libres **SUJET NORMAL**

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3) , puis pour (v_2, v_3) .

Pour justifier la liberté de chacune de ces trois familles, il suffit de rappeler qu'une famille de deux vecteurs est liée si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires. En analysant chacune des trois familles, on observe ainsi qu'elles sont libres.

2. La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Pour répondre à cette question, il suffit de déterminer l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de

$$\text{l'équation } xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0, \text{ c'est à dire du système : } \begin{cases} x + 4y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \end{cases} \text{ La dernière}$$

équation équivaut à $z = -y$ et lorsque l'on remplace alors z dans les deux premières équations, on obtient $x + 2y = 0$ et $x + 2y = 0$. Si l'on choisit alors $y = 1$, $z = -1$ et $x = -2$, on observe que c'est une solution du système donc $-2v_1 + v_2 - v_3 = 0$ et la famille est liée.

Exercice 4. Rang d'une famille, sous-espaces engendrés **SUJET NORMAL**

1. Trouver le rang, dans $\mathbb{R}^4$, de la famille :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $E = \mathbb{R}^4$.

Posons $F = \text{Vect} \{e_1, e_2\}$, $G = \text{Vect} \{e_3, e_4\}$, $G' = \text{Vect} \{e_3, e_4, e_5\}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E . Qu'en est-il de F et G' ?

Exercice 5. Espace de polynômes

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on note $P_0(X) = X^3$, $P_1(X) = (X - 1)^3$ et $P_2(X) = (X - 2)^3$ et l'on définit l'ensemble F par :

$$F = \{P \in E \mid P(0) + P(2) = 8P(1)\}$$

1. Rappeler la base canonique de E ainsi que la dimension de E . E est de dimension 4, sa base canonique est $(1, X, X^2, X^3)$.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

F contient le polynôme nul.

Si P et Q sont dans F , et que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors on a : $P(0) + P(2) = 8P(1)$ donc $\lambda P(0) + \lambda P(2) = 8\lambda P(1)$; $Q(0) + Q(2) = 8Q(1)$ donc $\mu Q(0) + \mu Q(2) = 8\mu Q(1)$. Enfin, on obtient $\lambda P(0) + \mu Q(0) + \lambda P(2) + \mu Q(2) = 8\lambda P(1) + 8\mu Q(1)$, c'est à dire $(\lambda P + \mu Q)(0) + (\lambda P + \mu Q)(2) = 8(\lambda P + \mu Q)(1)$. On en déduit que $\lambda P + \mu Q \in F$.

3. Déterminer le rang de la famille (P_0, P_1, P_2) . Etudions d'abord si la famille est libre, soient donc trois réels λ, μ et ν tels que :

$$\begin{aligned}\lambda X^3 + \mu(X-1)^3 + \nu(X-2)^3 &= 0 \\ \lambda X^3 + \mu(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) + \nu(X^3 - 6X^2 + 12X - 8) &= 0 \\ (\lambda + \mu + \nu)X^3 + (-3\mu - 6\nu)X^2 + (3\mu + 12\nu)X - \mu - 8\nu &= 0\end{aligned}$$

Les trois réels sont donc solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ -3\mu - 6\nu = 0 \\ 3\mu + 12\nu = 0 \\ -\mu - 8\nu = 0 \end{cases} \quad \text{De la somme des deux équations du milieu, on déduit } \nu = 0 \text{ puis } \mu = 0$$

à l'aide d'une des trois dernières équations, et enfin $\lambda = 0$ à l'aide de la première.

La famille (P_0, P_1, P_2) est libre donc de rang 3.

4. Déterminer une base de F et sa dimension.

F est un sous-espace de E donc il est de dimension ≤ 4 . $F \neq E$ car le polynôme constant 1 n'est pas dans F . Ainsi, la dimension de F est ≤ 3 . Enfin, on vérifie aisément que P_0, P_1 et P_2 sont dans F . Ainsi, $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(P_0, P_1, P_2) \subset F$, et l'on déduit de la question précédente que la dimension de F est ≥ 3 , c'est à dire que $\dim F = 3$. (P_0, P_1, P_2) étant libre, c'est une base de F .

Exercice 6. Une famille libre **SUJET BIS**

On considère le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des complexes distincts et l'on note pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\phi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}.$$

Montrer que la famille $(\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \dots, \phi_{\alpha_n})$ est libre.

On prouve ceci par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: pour $n = 1$, c'est évident puisque ϕ_{α_1} n'est pas la fonction nulle.

On suppose maintenant que c'est vrai au rang n , et l'on considère $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ des complexes distincts. Soient alors $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ des complexes tels que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$$

Pour toute valeur de $y \in \mathbb{R}$, on a donc aussi :

$$\lambda_1 e^{\alpha_1(x+y)} + \lambda_2 e^{\alpha_2(x+y)} + \dots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1}(x+y)} = 0$$

$$\lambda_1 e^{\alpha_1 y} e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_2 y} e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$$

Et l'on peut multiplier la 1ère relation par $e^{\alpha_{n+1} y}$, on a donc pour tout réel x :

$$\lambda_1 e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} y} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$$

On obtient par soustraction des deux lignes précédentes :

$$\lambda_1 (e^{\alpha_1 y} - e^{\alpha_{n+1} y}) e^{\alpha_1 x} + \lambda_2 (e^{\alpha_2 y} - e^{\alpha_{n+1} y}) e^{\alpha_2 x} + \dots + \lambda_n (e^{\alpha_n y} - e^{\alpha_{n+1} y}) e^{\alpha_n x} = 0$$

Ceci étant vrai pour tout x réel, on en déduit par hypothèse de récurrence que :

$$\lambda_1 (e^{\alpha_1 y} - e^{\alpha_{n+1} y}) = \lambda_2 (e^{\alpha_2 y} - e^{\alpha_{n+1} y}) = \dots = \lambda_n (e^{\alpha_n y} - e^{\alpha_{n+1} y}) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}$, on en déduit :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

L'égalité du départ donne $\lambda_{n+1} e^{\alpha_{n+1} x} = 0$ d'où $\lambda_{n+1} = 0$.

Ainsi, la propriété est héréditaire donc vraie à tout rang.

Exercice 7. Intersection d'hyperplans *SUJET BIS*

E est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie $n \geq 2$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace de dimension $n - 1$.

1. Rappeler l'énoncé et les hypothèses de la formule de Grassmann concernant la dimension d'une somme.

Si H et F sont deux s.e.v. de dimensions finies, il en est de même de $F + H$ et $F \cap H$ et l'on a :

$$\dim(H + F) = \dim H + \dim F - \dim(H \cap F)$$

2. Soit H un hyperplan de E et F un sev de E .

- (a) Écrire la formule de Grassmann pour $H + F$.

$$\dim(H + F) = n - 1 + \dim F - \dim(H \cap F)$$

- (b) Justifier que l'on a $H + F = H$ ou $H + F = E$.

Puisque $\dim H = n - 1$ et que $H \subset H + F \subset E$, on a : $n - 1 \leq \dim(H + F) \leq n$.

Cette double inclusion nous garantit si $\dim(H + F) = n - 1$ que $H + F = H$ et si $\dim(H + F) = n$ que $H + F = E$.

- (c) Établir l'encadrement : $\dim F - 1 \leq \dim(F \cap H) \leq \dim F$ et étudier les cas d'égalité.

D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(H \cap F) = n - 1 + \dim F - \dim(H + F)$$

D'après les inégalités précédentes, on a donc :

$$n - 1 + \dim F - n \leq \dim(H \cap F) \leq n - 1 + \dim F - (n - 1)$$

$$\dim F - 1 \leq \dim(H \cap F) \leq \dim F$$

On a $\dim(H \cap F) = \dim F$ lorsque $\dim(H + F) = n - 1$, c'est à dire lorsque $\dim H = \dim(H + F)$ d'où $H = H + F$ puisque $H \subset H + F$: ceci signifie $F \subset H$.

Si F n'est pas inclus dans H , alors $H + F$ est un sous-espace qui contient strictement H donc $\dim(H + F) = n$ puisque $H + F$ est de dimension strictement plus grande que H . C'est dans ce cas que l'on a $\dim F - 1 = \dim(H \cap F)$.