
Devoir surveillé

Cours

1. Racine $\alpha \in \mathbb{K}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$: rappeler la définition ainsi que la caractérisation par la divisibilité.
2. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sont les racines de P qui est scindé à racines simples et unitaire, qui est P ?
3. Multiplicité d'une racine : donner la définition.
4. Formule de Taylor pour les polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$: la préciser.
5. Dans un espace vectoriel E , prouver que l'on a pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
 - (a) $0x = 0_E$
 - (b) $\lambda 0_E = 0_E$
 - (c) $\lambda x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$
6. Que signifie : la famille $u_1, u_2, \dots, u_n$ est libre ?
7. Rappeler la définition de la somme $F + G$ si F et G sont des sous-espaces vectoriels.
8. Que signifie qu'une telle somme est directe ?
Rappeler la définition ainsi que la caractérisation par l'intersection.

Exercice 1. Factorisation d'un polynôme.

On cherche dans cet exercice à factoriser le polynôme suivant :

$$Q(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^3 + 2X^2 - X$$

1. Montrer que 1 est une racine de Q , préciser sa multiplicité.
2. Donner une autre racine évidente de Q .
3. Factoriser Q au maximum dans $\mathbb{R}[X]$, puis $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2. Une suite de Polynômes.

On note $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_0(x) = x$ et telle que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}(x) = (n+1) \int_0^x f_n(t) dt + x \left(1 - (n+1) \int_0^1 f_n(t) dt \right).$$

1. Calculer l'expression des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est la fonction associée à un unique polynôme réel que l'on notera P_n .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n vérifie les deux conditions suivantes :

$$P_n(0) = 0 \text{ et } P_n(X) - P_n(X-1) = X^n.$$

4. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les deux conditions de la question précédente. (On pourra noter R_n un polynôme qui vérifie ces conditions, puis prouver que l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n(k) = R_n(k)$ et conclure.)

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par $X^2 + X$. Factoriser les polynômes P_1 , P_2 et P_3 . Écrire P_4 sous la forme $X(X+1)Q_4$ où $Q_4 \in \mathbb{R}[X]$.
- Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$, calculer son coefficient dominant ainsi que le coefficient de X^n .
- Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P_n(p) = \sum_{k=1}^p k^n.$$

Exercice 3. Familles libres SUJET NORMAL

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

- Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3) , puis pour (v_2, v_3) .
- La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 4. Rang d'une famille, sous-espaces engendrés SUJET NORMAL

- Trouver le rang, dans $\mathbb{R}^4$, de la famille :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $E = \mathbb{R}^4$.

Posons $F = \text{Vect} \{e_1, e_2\}$, $G = \text{Vect} \{e_3, e_4\}$, $G' = \text{Vect} \{e_3, e_4, e_5\}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E . Qu'en est-il de F et G' ?

Exercice 5. Sous-espaces des Polynômes SUJET NORMAL

Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on note $P_0(X) = X^3$, $P_1(X) = (X-1)^3$ et $P_2(X) = (X-2)^3$ et l'on définit l'ensemble F par :

$$F = \{P \in E \mid P(0) + P(2) = 8P(1)\}$$

- Rappeler la base canonique de E ainsi que la dimension de E .
- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- Déterminer le rang de la famille (P_0, P_1, P_2) .
- Déterminer une base de F et sa dimension.

Exercice 6. Une famille libre SUJET BIS

On considère le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des complexes distincts et l'on note pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\phi_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}.$$

Montrer que la famille $(\phi_{\alpha_1}, \phi_{\alpha_2}, \dots, \phi_{\alpha_n})$ est libre.

Exercice 7. Intersection d'hyperplans SUJET BIS

E est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie $n \geq 2$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace de dimension $n-1$.

- Rappeler l'énoncé et les hypothèses de la formule de Grassmann concernant la dimension d'une somme.
- Soit H un hyperplan de E et F un sev de E .
 - Écrire la formule de Grassmann pour $H + F$.
 - Justifier que l'on a $H + F = H$ ou $H + F = E$.
 - Établir l'encadrement : $\dim F - 1 \leq \dim(F \cap H) \leq \dim F$ et étudier les cas d'égalité.