

Applications linéaires

1 Définitions, noyau, image

Exercice 1.

Soit f l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y - z, z - x) \end{array} .$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Déterminer $\text{Im } f + \text{Ker } f$.
4. Expliciter $f \circ f$.

Exercice 2.

On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 . En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
3. L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 3.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f_a l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (8x - 2y + az, ax + y + 2z) \end{array} .$$

1. Montrer que f_a est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f_a en fonction de a .

Exercice 4.

Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans lui-même définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de \mathbb{R}^4 .
2. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
3. En déduire la dimension de $\text{Im}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
4. Quelle est la dimension du noyau de f ?
Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\text{Ker}(f)$.

Exercice 5.

On considère dans \mathbb{R}^2 les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

Indication : Exprimer w dans la base (u, v) .

Exercice 6.

Soient E un \mathbb{K} ev et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E), v \circ u = u \circ v\}$$

est un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 7.

Soient E un \mathbb{K} ev, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $u^2 = u \circ u$.

1. Montrer :

$$E = \text{Ker } u + \text{Im } u \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } u = \text{Im } u^2.$$

2. Montrer :

$$\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{0\}.$$

3. Que peut-on dire si E est de dimension finie ?

Exercice 8.

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 - 3f + 2\text{Id} = 0$, où $f^3 = f \circ f \circ f$. Montrer que f est un automorphisme de E .

Exercice 9.

Soient E un \mathbb{K} ev et $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On suppose que pour tout x de E , $f(x) \times g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 10.

Soit E le s.e.v. de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont le noyau est E .

2 Applications linéaires sur des espaces de polynômes

Exercice 11.

Soient f et g les applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définies par : $f(P) = P'$ et $g(P)$ est l'unique primitive de P nulle en 0.

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner les noyaux et les images de f et g .
3. Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } g$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 12.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = P(X + 1) - P(X)$$

Exercice 13.

Soient $n \geq 2$ et :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire. Déterminer son image, son noyau et son rang.
2. Soit $Q \in \text{Im } f$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 14.

Montrer que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(1), P'(1), \dots, P^{(n)}(1)) \end{aligned}$$

Exercice 15.

Soient a_1, \dots, a_p dans \mathbb{K} deux à deux distincts, n_1, \dots, n_p dans \mathbb{N} .

On pose $N = (n_1 + 1) + \dots + (n_p + 1)$.

Soit $(b_0^1, \dots, b_{n_1}^1, b_0^2, \dots, b_{n_2}^2, \dots, b_0^p, \dots, b_{n_p}^p) \in \mathbb{K}^N$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{N-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \forall j \in \{0, \dots, n_i\}, \quad P^{(j)}(a_i) = b_j^i.$$

Indication. Considérer :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_{N-1}[X] &\rightarrow \mathbb{K}^N \\ P &\mapsto (P(a_1), P'(a_1), \dots, P^{(n_1)}(a_1), P(a_2), P'(a_2), \dots, P^{(n_2)}(a_2), \dots, P(a_p), \dots, P^{(n_p)}(a_p)) \end{aligned}$$

3 Projecteurs et symétries

Exercice 16.

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $v = (1, -1, 1)$ et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$. Trouver les coordonnées de l'image du vecteur (x, y, z) par la projection p de \mathbb{R}^3 sur $\mathbb{R}v$ parallèlement à H .

Exercice 17.

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur. Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f .

Exercice 18.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, p et q des projecteurs de E .

1. Montrer que :

$$\text{Im } p = \text{Im } q \Leftrightarrow p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{Ker } p = \text{Ker } q$.
3. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$. Montrer qu'alors

$$\text{Im } (p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q \text{ et } \text{Ker } (p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q.$$

Exercice 19.

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel, u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que :

$$\text{Ker } (v \circ u) = \text{Ker } u \Leftrightarrow \text{Im } u \cap \text{Ker } v = \{0\}.$$

2. Montrer que :

$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v \Leftrightarrow \text{Im } u + \text{Ker } v = E.$$

4 Théorème du rang

Exercice 20.

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux s.e.v. de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ de noyau F_1 et d'image F_2 .

Exercice 21.

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension $2p$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ et $\text{rg } f = p$ si et seulement si $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

Exercice 22.

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie n , u et v deux endomorphismes de E .

1. Montrer que :

$$\text{rg } u + \text{rg } v - n \leq \text{rg } (u \circ v) \leq \min\{\text{rg } u, \text{rg } v\}.$$

2. Montrer que :

$$|\text{rg } u - \text{rg } v| \leq \text{rg } (u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v.$$

3. On suppose que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \text{GL}(E)$. Calculer $\text{rg } u + \text{rg } v$.

5 Exercices plus ardu

Exercice 23.

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel. Déterminer les $f \in \mathcal{L}(E)$ telles que : $\forall x \in E, (x, f(x))$ liée.

Exercice 24. Lemmes de factorisations.

Soient E, F et G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels.

1. Soient $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Montrer :

$$\text{Im } u \subset \text{Im } v \quad \Leftrightarrow \quad \exists w \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), \quad u = v \circ w.$$

2. Soient $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Montrer :

$$\text{Ker } v \subset \text{Ker } u \quad \Leftrightarrow \quad \exists w \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G), \quad u = w \circ v.$$

Exercice 25.

Soient E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

1. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
2. Quels sont les sous-espaces stables par f ?
3. Montrer que $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$.