Programme des colles du 13/04 au 17/04

1. Espaces vectoriels.
   — Intersection de sous-espaces vectoriels.
   — Somme de deux sous-espaces vectoriels.
   — Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection.
   — Sous-espaces supplémentaires.
   — Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice.
   — Famille libre, famille liée.
   — Bases et coordonnées, bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   — Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
   — Espaces de dimension finie, existence de bases et théorème de la base incomplète.
   — Rang d'une famille de vecteurs.
   — Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
   — Existence de supplémentaires, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
   — Formule de Grassmann.
2. Analyse asymptotique
   — Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
   — Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
   — Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.
   — DL_0 et limite de fonction, DL_1 et dérivabilité en un point.
   — Lien entre régularité d'une fonction et développement limité.
   — Développement limité d'une primitive
   — Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
   — Calcul de développements limités d'une somme, d'un produit, d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
   — **Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).**
   — Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Applications linéaires.
   — Définition de la linéarité, exemples.
   — Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
   — Image directe d'un s.e.v., image réciproque.
   — Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
   — Applications linéaires de rang fini.
   — Isomorphismes, invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
   — Endomorphismes
   — **Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Connaître parfaitement la définition, savoir l'illustrer par un schéma.** Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$ (**La démonstration de la caractérisation des projecteurs peut être demandée aux étudiants les plus à l'aise avec le cours**)
   — Groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E, définition de u^k si $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
   — **Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E**
   — Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
   — Espaces de dimension finie et isomorphismes.
   — Théorème du rang :
     — Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et que S est un supplémentaire de Ker u, alors $u_{|S}^{|\mathrm{Im}\ u}$ est un isomorphisme.
     — Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors u est de rang fini et :

$$\mathrm{rg}\ (u) + \dim\ (\mathrm{Ker}\ u) = \dim\ (E).$$