Devoir à la maison

Exercice 1. *Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$*

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 2. *Application linéaire dans un espace de polynômes*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 3. *Matrice d'une application linéaire sur un espace de polynômes*

Dans cet exercice, on considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $e = (1, X, X^2, X^3)$ et l'application $\Phi : E \to E$ définie par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X) + X(P'(X) + P''(X)).$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Calculer la matrice $M = \mathrm{Mat}_e(\Phi)$.
3. Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}\,(\Phi - 3Id_E)$.
4. Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}\,(\Phi - 4Id_E)$.
5. On note $f_1 = 1$, $f_2 = X$, $f_3 = X^2 + 2X$, $f_4 = X^3 + 6X^2 + 6X$.
   Calculer $\Phi(f_1)$, $\Phi(f_2)$, $\Phi(f_3)$, $\Phi(f_4)$.
6. Exprimer $\Phi(f_1)$, $\Phi(f_2)$, $\Phi(f_3)$, $\Phi(f_4)$ dans la base $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, et en déduire la matrice N de Φ dans la base f.
7. Calculer $\Phi^n(f_1)$, $\Phi^n(f_2)$, $\Phi^n(f_3)$, $\Phi^n(f_4)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
8. Exprimer X^3 dans la base f et en déduire $\Phi^n(X^3)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. *Endomorphisme d'un espace de fonctions sinus/cosinus*

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $\lambda\cos + \mu\sin$ avec λ et μ réels.

1. Justifier que E est un espace vectoriel de dimension finie dont le couple $(\cos, \sin)$ est une base.
2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application D de E dans E, qui est un endomorphisme.
3. Donner la matrice de D dans la base trouvée en 1.
4. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E, il existe un unique vecteur u de E tel que $Du = v$.
5. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D\left(D^{-1}(u)\right) = u$ et $D^{-1}\left(D(u)\right) = u$.
6. Donner la matrice de D^{-1} dans la base trouvée en 1.