

## Matrices et applications linéaires

**Exercice 1.** *Matrice d'une application linéaire*

Soit  $u$  l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z).$$

1. Montrer que  $u$  est linéaire
2. Soient  $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ . Calculer  $u(\mathcal{E}_1)$ ,  $u(\mathcal{E}_2)$  et  $u(\mathcal{E}_3)$  en fonction de  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  et  $\mathcal{F}_4$ .
3. Écrire la matrice de  $u$  dans les bases canoniques.
4. Montrer que  $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
5. Écrire la matrice de  $u$  dans les bases  $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$  et  $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ .

**Exercice 2.** *Noyau et Image d'une matrice*

On considère l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$ .

**Exercice 3.** *Noyau et Image à l'aide de la matrice*

Soient  $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $w_1 = (1, -2, 0)$ ,  $w_2 = (-1, 2, 0)$ ,  $w_3 = (0, 0, 2)$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = w_1, u(\mathcal{E}_2) = w_2, u(\mathcal{E}_3) = w_3.$$

1. (a) Exprimer  $w_1, w_2, w_3$  en fonction de  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$ .  
En déduire la matrice de  $u$  dans la base canonique.
- (b) Soit  $W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $u(W)$ .
2. (a) Trouver une base de  $\text{Ker } (u)$  et une base de  $\text{Im}(u)$ .
- (b) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } (u) \oplus \text{Im}(u)$ .
3. Déterminer  $\text{Ker } (u - Id)$  et  $\text{Im}(u - Id)$  où  $Id$  désigne l'identité de  $\mathbb{R}^3$ . En déduire que  $u - Id$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 4.** *Inverse et Puissances d'un endomorphisme à l'aide de sa matrice*

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y - z, -3x + 4y - 3z, y - x).$$

1. Donner la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Vérifier que  $A^2 - 3A + 2I = 0$ ; en déduire que  $A$  est inversible, et donner son inverse.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $B_n = A^n + A - 2I$ .
  - (a) Montrer que  $B_{n+1} = 2B_n$ .
  - (b) En déduire une expression de  $A^n$ .

**Exercice 5.** *Image et Noyau supplémentaires*

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de  $\text{Im } f$ , une base de  $\text{Ker } f$ . A t-on  $\text{Ker } f \oplus \mathfrak{S}f = \mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 6.** *Rang de matrice et équation de l'image*

Soit  $u$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de  $u$ , ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de  $\text{Im } u$ .

**Exercice 7.** *Application linéaire définie sur les matrices*

Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'application de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  définie pour tout  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par  $f(M) = AM$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 8.** *Matrice d'un endomorphisme de l'espace des polynômes*

On considère l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) = P' + P.$$

Ecrire la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ . L'endomorphisme  $u$  est-il inversible ? Si oui, donner la matrice de  $u^{-1}$  dans la base canonique.

**Exercice 9.** *Inverse de la matrice d'un endomorphisme de l'espace des polynômes*

Soit :

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

Montrer que  $\Phi$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Ecrire la matrice  $A$  de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Calculer  $A^{-1}$ .

**Exercice 10.** *Base adaptée à un endomorphisme dont le carré est nul*

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $f \neq 0$  et  $f^2 = 0$ .

1. Démontrer que  $\dim(\ker(f)) = 2$ .

2. En déduire qu'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 11. Rang de matrices**

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{1.} \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \mathbf{2.} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{3.} \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \mathbf{4.} \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

**Exercice 12. Surjective ?**

Soient  $\alpha, \beta$  deux réels et

$$M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles l'application linéaire associée à  $M_{\alpha, \beta}$  est surjective.

**Exercice 13. Avec un paramètre**

Déterminer, suivant la valeur du réel  $a$ , le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 14. Endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$** 

Soient  $a, b$  dans  $\mathbb{C}$  distincts et

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi : \mathbb{C}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\
 P & \mapsto & (X - a)(X - b)P'(X) - n \left( X - \frac{a+b}{2} \right) P(X)
 \end{array}$$

Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}_n[X]$ . Ecrire la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**Exercice 15. Changement de base**

Soit  $u$  l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $(f_1, f_2)$  celle de  $\mathbb{R}^2$ . On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que  $(e'_1, e'_2, e'_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  puis que  $(f'_1, f'_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Quelle est la matrice de  $u$  dans ces nouvelles bases ?

**Exercice 16.** *Matrice d'une projection*

Soient, dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $P$  le plan d'équation  $z = x - y$  et  $D$  la droite d'équation  $x = -y = z$ . Trouver la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection  $p$  de  $\mathbb{R}^3$  sur  $P$  parallèlement à  $D$ .

**Exercice 17.** *Matrice de projecteur*

Soient  $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$  telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $AB$  est une matrice de projecteur.
2. Montrer que  $BA = I_2$ .

**Exercice 18.** *Exemples de matrices semblables*

Montrer que les matrices  $A, B, C$  et  $D$  suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 19.** *Deux matrices semblables*

Soit  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ . Le but de l'exercice est de démontrer que  $M$  et  $D$

sont semblables. On note  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est  $M$ .

1. Démontrer qu'il existe  $u_1 \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\text{Vect}(u_1) = \ker(f - Id)$ . De même, prouver l'existence de  $u_2, u_{-4} \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\text{Vect}(u_2) = \ker(f - 2Id)$  et  $\text{Vect}(u_{-4}) = \ker(f + 4Id)$ .
2. Démontrer que  $(u_1, u_2, u_{-4})$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
3. Conclure.

**Exercice 20.** *Matrice nilpotente d'indice maximal*

Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

1. Calculer  $J^p$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $J^{n-1} \neq 0$  et  $J^n = 0$ .
2. Soit  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  telle que  $M^{n-1} \neq 0$  et  $M^n = 0$ . ( On dit que  $M$  est nilpotente d'ordre  $n$  )
  - (a) Justifier l'existence d'un vecteur  $X_0 \in \mathbb{K}^n$  tel que  $M^{n-1}X_0 \neq 0$ .
  - (b) Montrer que  $(X_0, MX_0, M^2X_0, \dots, M^{n-1}X_0)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ .
  - (c) Montrer que  $M$  est semblable à  $J$ .