
Programme des colles du 04/05 au 07/05

1. Espaces vectoriels.
 - Intersection, somme de deux sous-espaces vectoriels.
 - Somme directe. Définition par l'unicité de l'écriture, caractérisation par l'intersection. Sous-espaces supplémentaires.
 - Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs, famille génératrice.
 - Famille libre, famille liée.
 - Bases et coordonnées, bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 - Espaces de dimension finie, existence de bases et théorème de la base incomplète.
 - Rang d'une famille de vecteurs.
 - Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
 - Existence de supplémentaires, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
 - Formule de Grassmann.
2. Analyse asymptotique
 - Relations de comparaison pour les fonctions : négligeabilité, domination, équivalence.
 - Propriétés conservées par équivalence : limite, signe.
 - Développement limité d'une fonction en un point, unicité du développement limité.
 - DL_0 et limite de fonction, DL_1 et dérivabilité en un point.
 - Lien entre régularité d'une fonction et développement limité.
 - Développement limité d'une primitive
 - Formule de Taylor-Young, développements limités de l'exponentielle, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.
 - Calcul de développements limités d'une somme, d'un produit, d'une composée, de l'inverse, d'un quotient.
 - Tangente et position par rapport à la tangente (point d'inflexion).
 - Application des développements limités à la recherche d'asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Applications linéaires.
 - Définition de la linéarité, exemples.
 - Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
 - Image directe d'un s.e.v., image réciproque.
 - Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
 - Applications linéaires de rang fini.
 - Isomorphismes, invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
 - Endomorphismes
 - **Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Connaître parfaitement la définition, savoir l'illustrer par un schéma. Caractérisations : $p \circ p = p$, $s \circ s = Id_E$ (La démonstration de la caractérisation des projecteurs peut être demandée aux étudiants les plus à l'aise avec le cours)**
 - Groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E , définition de u^k si $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
 - **Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E**
 - Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
 - Espaces de dimension finie et isomorphismes.
 - Théorème du rang :
 - **Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors $u|_S^{\text{Im } u}$ est un isomorphisme.**
 - **Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et :**
$$\text{rg } (u) + \text{dim } (\text{Ker } u) = \text{dim } (E).$$
4. Matrices d'applications linéaires.
 - Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
 - Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
 - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire avec la matrice de l'application.

- Matrice d'une composée.
- Lien entre isomorphismes et matrices inversibles
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, rang et noyau d'une matrice.
- Théorème du rang pour une matrice.