

Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4

1. On a :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = y \\ t = t \end{cases}$$

Une base de F est donc donnée par les deux vecteurs $v_1 = (1, -1, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 0, 1)$.

2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille (v_1, v_2) par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de \mathbb{R}^4 . On vérifie facilement que (v_1, v_2, e_1, e_2) est une famille libre, donc une base de \mathbb{R}^4 .
3. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne le système

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ a + 2b = 0 \\ a + 3b - c = 0 \\ a + 4b = 0 \end{cases}$$

ce qui donne facilement $b = 0$ (comparer la deuxième et la quatrième équation), puis $a = 0$ et $c = 0$. La famille est libre.

4. La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G . C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G qui est de dimension 3.
5. Soit $au_1 + bu_2 + cu_3$ un vecteur de G . On cherche les conditions sur a, b, c pour qu'il soit élément de F . Il vient

$$\begin{cases} 2a + 3b - c = 0 \\ 2a + 4b - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a = -3b + c \\ b = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -c \\ b = c \\ c = c \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs de F et G sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1, 1, 1, 3)$. Une base de $F \cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1, 1, 1, 3)$.

6. D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 qui est de dimension 4, et donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

7. Non, car $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Exercice 2. Matrice d'application linéaire dans un espace de polynômes

1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E . Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que u est linéaire. Mais, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q) + (1 - X)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda P + \mu Q + (1 - X)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda (P + (1 - X)P') + \mu (Q + (1 - X)Q') \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q). \end{aligned}$$

u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E , on sait que $u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$. On va pouvoir en extraire une base. On a :

$$u(1) = 1, \quad u(X) = X, \quad u(X^2) = -X^2 + 2X, \quad u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$

On en déduit que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que $u(X)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même $u(X) = u(1)$). Ainsi, ceci prouve que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

3. Ecrivons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et calculons $u(P)$:

$$u(P) = -2aX^3 + (3a - 2b)X^2 + 2bX + c + d.$$

Ainsi, on obtient

$$u(P) = 0 \iff \begin{cases} -2a = 0 \\ 3a - 2b = 0 \\ 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d = -c \end{cases}$$

Ainsi, $P \in \ker(u) \iff \exists c \in \mathbb{R}, P = c(X - 1)$. Une base de $\ker(u)$ est donné par le polynôme $X - 1$.

4. La réunion des bases de $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment une base de E . Ceci prouve que $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires.

Exercice 3. *Matrice d'une application linéaire sur un espace de polynômes*

Dans cet exercice, on considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $e = (1, X, X^2, X^3)$ et l'application $\Phi : E \rightarrow E$ définie par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X) + X(P'(X) + P''(X)).$$

1. Montrons que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$:
- Comme $P' + P''$ est un polynôme de degré au maximum celui de P moins 1, $P + X(P' + P'')$ est de degré inférieur ou égal à celui de P et Φ est bien définie de E dans E
 - Calculons pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E^2$:

$$\Phi(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda P(X) + \mu Q(X) + X((\lambda P(X) + \mu Q(X))' + (\lambda P(X) + \mu Q(X))'')$$

$$\Phi(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda(P(X) + X(P'(X) + P''(X))) + \mu(Q(X) + X(Q'(X) + Q''(X)))$$

$$\Phi(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda\Phi(P(X)) + \mu\Phi(Q(X)).$$

Donc Φ est linéaire.

2. Calculons la matrice $M = \text{Mat}_e(\Phi)$.

$$\Phi(1) = 1 \quad ; \quad \Phi(X) = 2X \quad ; \quad \Phi(X^2) = 3X^2 + 2X \quad ; \quad \Phi(X^3) = 4X^3 + 6X^2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Pour déterminer la dimension et une base de $\text{Ker}(\Phi - 3 \text{id}_E)$, écrivons la matrice de cette application dans e :

$$M - 3I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ est donc dans $\text{Ker}(\Phi - 3 \text{id}_E)$ s.si :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené au système : $\begin{cases} -2a = 0 \\ -b + 2c = 0 \\ 6d = 0 \\ d = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $a = d = 0$ et $b = 2c$, donc

$P = 2cX + cX^2$. Ainsi, $\text{Ker}(\Phi - 3 \text{id}_E) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(2X + X^2)$ est un sous-espace de dimension 1 de base $(2X + X^2)$.

4. Pour déterminer la dimension et une base de $\text{Ker}(\Phi - 4 \text{id}_E)$, écrivons la matrice de cette application dans e :

$$M - 4I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ est donc dans $\text{Ker}(\Phi - 4 \text{id}_E)$ s.si :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené au système : $\begin{cases} -3a = 0 \\ -2b + 2c = 0 \\ -c + 6d = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Il équivaut à $a = 0$ et $b = c = 6d$, donc $P = 6dX + 6dX^2 + dX^3$.

Ainsi, $\text{Ker}(\Phi - 4 \text{id}_E) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(6X + 6X^2 + X^3)$ est un sous-espace de dimension 1 de base $(6X + 6X^2 + X^3)$.

5. On note $f_1 = 1$, $f_2 = X$, $f_3 = X^2 + 2X$, $f_4 = X^3 + 6X^2 + 6X$.

Calculons $\Phi(f_1) = 1$, $\Phi(f_2) = 2X$, $\Phi(f_3) = 3X^2 + 6X$, et $\Phi(f_4) = 4X^3 + 24X^2 + 24X$.

6. Exprimons dans la base f : $\Phi(f_1) = f_1$, $\Phi(f_2) = 2f_2$, $\Phi(f_3) = 3f_3$, $\Phi(f_4) = 4f_4$. On en déduit la matrice N de Φ dans la base f :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

7. On montre trivialement par récurrence : $\Phi^n(f_1) = f_1$, $\Phi^n(f_2) = 2^n f_2$, $\Phi^n(f_3) = 3^n f_3$, $\Phi^n(f_4) = 4^n f_4$.

8. $X^3 = 6f_2 - 6f_3 + f_4$ donc

$$\Phi^n(X^3) = 6\Phi^n(f_2) - 6\Phi^n(f_3) + \Phi^n(f_4)$$

$$\Phi^n(X^3) = 6 \cdot 2^n f_2 - 6 \cdot 3^n f_3 + 4^n f_4$$

Exercice 4. Sur un espace de fonctions sinus/cosinus

On note E l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui s'écrivent sous la forme $\lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ réels.

1. Justifier que E est un espace vectoriel de dimension finie dont le couple (\cos, \sin) est une base. Par définition, E est le s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les deux fonctions \cos et \sin . Il s'agit donc de prouver que (\cos, \sin) est une famille libre.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Ceci signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \cos x + \mu \sin x = 0.$$

Ainsi, on en déduit pour $x = 0$ que $\lambda = 0$ puis pour $x = \frac{\pi}{2}$ que $\mu = 0$.

La famille (\cos, \sin) est libre et génératrice, c'est une base.

2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application D de E dans E , qui est un endomorphisme.

D est tel que pour tous λ, μ réels, on a $D(\lambda \cos + \mu \sin) = -\lambda \sin + \mu \cos$. Ainsi, $D(E) \subset E$ donc l'opérateur de dérivation définit bien un endomorphisme de E .

3. Donner la matrice de D dans la base trouvée en 1.

$$\text{Mat}_{(\cos, \sin)}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E , il existe un unique vecteur u de E tel que $Du = v$. Il est clair que la matrice ci-dessus, dont les deux colonnes forment une famille libre, est de rang 2. Ainsi, cette matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible donc D est un isomorphisme.

5. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D(D^{-1}(u)) = u$ et $D^{-1}(D(u)) = u$.

Soit donc $u \in E$, on a λ et μ réels tels que $u = \lambda \cos + \mu \sin$, et l'on cherche λ' et μ' réels tels que $v = \lambda' \cos + \mu' \sin$ vérifie : $D(v) = u$, c'est à dire $-\lambda' \sin + \mu' \cos = \lambda \cos + \mu \sin$. Par liberté de la famille (\cos, \sin) , ceci équivaut à $\mu' = \lambda$ et $\lambda' = -\mu$. Ainsi, on a :

$$D^{-1}(\lambda \cos + \mu \sin) = -\mu \cos + \lambda \sin.$$

6. Donner la matrice de D^{-1} dans la base trouvée en 1.

$$\text{Mat}_{(\cos, \sin)}(D^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$