
Programme des colles du 18/05 au 22/05

1. Applications linéaires.
 - Définition de la linéarité, exemples.
 - Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
 - Image directe d'un s.e.v., image réciproque.
 - Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
 - Applications linéaires de rang fini.
 - Isomorphismes, invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
 - Endomorphismes
 - Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.
Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$
 - Groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E , définition de u^k si $u \in GL(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
 - **Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E**
 - Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
 - Espaces de dimension finie et isomorphismes.
 - Théorème du rang :
 - **Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors $u|_S^{\text{Im } u}$ est un isomorphisme.**
 - **Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et :**

$$\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim(E).$$

2. Matrices d'applications linéaires.
 - Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
 - Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
 - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire avec la matrice de l'application.
 - Matrice d'une composée.
 - Lien entre isomorphismes et matrices inversibles
 - Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, rang et noyau d'une matrice.
 - Théorème du rang pour une matrice.
 - Invariance du rang par les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, ainsi que par transposition.
 - Matrice de passage d'une base à une autre.
 - **Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.**
 - Matrices semblables.
 - Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.
 - Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A .
 - Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.