
Programme des colles du 26/05 au 29/05

1. Applications linéaires.

- Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
- Espaces de dimension finie et isomorphismes.
- Théorème du rang :
 - **Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors $u|_S^{\text{Im } u}$ est un isomorphisme.**
 - **Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et :**

$$\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim(E).$$

2. Matrices d'applications linéaires.

- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
- Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire avec la matrice de l'application.
- Matrice d'une composée.
- Lien entre isomorphismes et matrices inversibles
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, rang et noyau d'une matrice.
- Théorème du rang pour une matrice.
- Invariance du rang par les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, ainsi que par transposition.
- Matrice de passage d'une base à une autre.
- **Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.**
- Matrices semblables.
- Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.
- Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A .
- Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.

3. Arithmétique et dénombrement

- Divisibilité dans \mathbb{Z} , propriétés
- Division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$: existence et unicité du quotient $q \in \mathbb{Z}$ et du reste $r \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ t.q. $a = bq + r$.
- PGCD et PPCM, algorithme d'Euclide pour le PGCD
- Nombres premiers, définition, crible d'Eratosthène.
- Décomposition d'un entier $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers, diviseurs d'un entier, expression du PGCD et du PPCM à l'aide de la décomposition des deux entiers, produit du PGCD et du PPCM.
- Cardinal d'un ensemble fini. Notations $|A|$, $\text{Card}(A)$.
- Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.
- Si $f : E \rightarrow F$ est une application entre deux ensembles finis, on a :
 - si f bijective, $|E| = |F|$.
 - En cas d'égalité des cardinaux de E et F , équivalence entre injectivité et surjectivité.
- p -uplets et cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- Nombre d'arrangements (ou p -uplets d'éléments distincts) d'un ensemble fini, nombre d'applications injectives entre ensembles finis, de permutations.
- Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .
- **Justifications combinatoires de la formule de Pascal et du binôme de Newton.**