Programme des colles du 08/06 au 12/06

1. Arithmétique et dénombrement
   - Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, propriétés
   - Division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par $b \in \mathbb{N}^*$: existence et unicité du quotient $q \in \mathbb{Z}$ et du reste $r \in [\![0, b-1]\!]$ t.q. $a = bq + r$.
   - PGCD et PPCM, algorithme d'Euclide pour le PGCD
   - Nombres premiers, définition, crible d'Eratosthène.
   - Décomposition d'une entier $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers, diviseurs d'un entier, expression du PGCD et du PPCM à l'aide de la décomposition des deux entiers, produit du PGCD et du PPCM.
   - Cardinal d'un ensemble fini. Notations $|A|$, $\mathrm{Card}(A)$.
   - Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.
   - Si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles finis, on a :
     - si f bijective, $|E| = |F|$.
     - En cas d'égalité des cardinaux de E et F, équivalence entre injectivité et surjectivité.
   - p-uplets et cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.
   - Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
   - Nombre d'arrangements (ou p-uplets d'éléments distincts) d'un ensemble fini, nombre d'applications injectives entre ensembles finis, de permutations.
   - Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.
   - Justifications combinatoires de la formule de Pascal et du binôme de Newton.
2. Probabilités
   - Expérience aléatoire et univers
   - Système complet d'événements.
   - Définition d'une probabilité.
   - Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité d'une différence ou de l'événement contraire, croissance.
   - Détermination d'une probabilité par les images des singletons, probabilité uniforme.
   - Probabilités conditionnelles : L'application P_B définit une probabilité sur Ω, Formule des probabilités composées, Formule des probabilités totales
   - **Formules de Bayes**
   - **Couple d'événements indépendants : savoir prouver que si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ aussi.**
   - Famille finie d'événements indépendants.
   - Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers à valeurs dans un ensemble E.
   - Loi d'une variable aléatoire X.
   - Loi uniforme sur un ensemble fini E.
   - Loi de Bernoulli de paramètre p dans $[0, 1]$.
   - Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
   - Indépendance de variables aléatoires, lemme des coalitions.
   - Espérance d'une variable aléatoire X, calculée à l'aide de la loi de X ou à partir d'une somme sur Ω.
   - Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, $|E(X)| \leq E(|X|)$.
   - Formule $E(XY) = E(X)E(Y)$ si X et Y sont indépendantes.
   - Espérance d'une variable aléatoire constante, suivant la loi de Bernoulli, binomiale.
   - Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.
   - Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.
   - Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
   - **Espérance et Variance d'une variable binomiale : savoir refaire les calculs avec la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.**
   - Covariance de deux variables aléatoires. Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
   - Relation $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, cas de deux variables indépendantes.
   - Variance d'une somme, cas de variables décorrélées. On retrouve la variance d'une variable binomiale.
   - Inégalité de Markov.
   - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.