

## Produits scalaires

**Exercice 1.** *Produits scalaires sur  $\mathbb{R}^2$*

Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^2$  ?

1.  $\varphi_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}$  ;
2.  $\varphi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_2y_2$  ;
3.  $\varphi_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$ .

**Exercice 2.** *Un produit scalaire sur les polynômes*

Soit  $n \geq 1$  et soit  $a_0, \dots, a_n$  des réels distincts deux à deux. Montrer que l'application  $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exercice 3.** *Des exemples de produit scalaire*

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1.  $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$  sur  $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$  ;
2.  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$  sur  $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  où  $w \in E$  est telle que  $w(x) > 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

**Exercice 4.** *Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

Démontrer que pour tous  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

**Exercice 5.** *Quand une inégalité en implique une autre...*

Soit  $x, y, z$  trois réels tels que  $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$ . Démontrer que  $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$ .

**Exercice 6.** *Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

1. Démontrer que

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose en outre que  $x_k > 0$  pour chaque  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Démontrer que

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

**Exercice 7.** *Produit scalaire et théorème fondamental du calcul intégral*

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$  telle que  $f(a) = 0$ .

1. Démontrer que, pour tout  $t \in [a, b]$ , on a

$$f^2(t) \leq (t - a) \int_a^t f'^2(u) du.$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f^2(t) dt \leq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$

**Exercice 8.** *Stricte convexité de la norme*

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Soient  $x$  et  $y$  dans  $E$  tels que :  $x \neq y$  et  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Si  $t \in ]0, 1[$ , montrer que  $\|tx + (1 - t)y\| < 1$ .

**Exercice 9.** *Polynômes de Tchebychev*

Montrer que  $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \int_0^\pi P(\cos(t))Q(\cos(t))dt$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

Vérifier que la famille des polynômes de Tchebychev est une base orthogonale de  $(\mathbb{R}[X], \varphi)$ . (Rappel : le  $n$ -ième polynôme de Tchebychev,  $T_n$  est celui qui vérifie  $\forall t \in \mathbb{R}, T_n(\cos t) = \cos(nt)$ ).

**Exercice 10.** *Produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$*

$n \geq 2$  est un entier . On considère

$$\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1.  $\varphi_n$  est-elle un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$  ?
2. Déterminer une base orthonormée de  $(\mathbb{R}_2[X], \varphi_2)$ .

**Exercice 11.** *Polynômes de Legendre*

On définit pour,  $n \in \mathbb{N}$  :

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n} ((X^2 - 1)^n).$$

1. (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $L_n$ .  
(b) Montrer que  $L_n$  possède  $n$  racines simples réelles et que celles-ci sont dans  $] - 1, 1[$ .
2. Montrer que l'application qui à un couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}[X]$  associe  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
3. (a) Montrer que la famille  $(L_n)_{n \geq 0}$  est orthogonale pour ce produit scalaire.  
*Ind.* Effectuer des intégrations par parties.  
(b) Déterminer la norme de  $L_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .  
*Ind.* Utiliser les intégrales de Wallis.  
(c) En déduire l'existence d'une base orthonormée  $(\tilde{L}_n)_{n \geq 0}$  vérifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg \tilde{L}_n = n$ .

4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer :

$$\inf \left\{ \int_{-1}^1 (t^n - P(t))^2 dt, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}.$$

**Exercice 12.** *Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension 1*

On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire euclidien canonique. Donner la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale d'image :

$$D = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13.** *Projection orthogonale sur un s.e.v. défini par des équations*

On munit  $\mathbb{R}^4$  de son produit scalaire euclidien canonique. Soit :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur  $F$ .

**Exercice 14.** *Projection orthogonale dans  $\mathbb{R}_n[X]$*

On munit  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire euclidien rendant la base canonique orthonormée. Soit  $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ . Calculer la projection de 1 sur  $H$  et la distance de 1 à  $H$ .

**Exercice 15.** *Minimum d'ensembles d'intégrales*

Déterminer :

1.

$$\inf \left\{ \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2.

$$\inf \left\{ \int_0^\pi (\cos t - at - b)^2 dt \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Exercice 16.** *Orthogonal d'une somme et d'une intersection en dimension finie*

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

**Exercice 17.** *Caractérisation des B.O.N.*

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Soient  $p \leq n$  et  $(v_1, \dots, v_p)$  des vecteurs de  $E$ . Montrer l'équivalence entre :

1.  $(v_1, \dots, v_p)$  est une base orthonormée ;
2.  $\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, v_i \rangle^2$ .

**Exercice 18.** *Calcul d'une projection orthogonale*

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et, pour  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  :

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2 dt.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad I(P) \geq I(Q).$$

On écrit  $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$  et on pose :

$$F = \frac{1}{X+n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X+k+1}.$$

2. Calculer  $F(j)$  pour  $0 \leq j \leq n-1$ . En déduire  $F$ .
3. Montrer que  $I(Q) = F(n)$ . Calculer cette quantité.

**Exercice 19.** *Caractérisation des projecteurs orthogonaux par la norme*

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. Montrer que  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

**Exercice 20.** *Simplexe régulier*

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Montrer qu'il existe  $n+1$  vecteurs unitaires  $x_1, \dots, x_{n+1}$  tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{n}.$$

**Exercice 21.** *Famille obtusangles*

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ . On appelle *famille obtusangle* de vecteurs de  $E$  toute famille  $(x_i)_{i \in I}$  telle que :  $\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$ . Montrer que toute famille obtusangle de vecteurs de  $E$  est de cardinal fini  $\leq n+1$ .

**Exercice 22.** *Base orthonormée et projection orthogonale sur une droite*

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $E$ .

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle  $D$  telle que les normes des projections orthogonales des  $e_i$  sur  $D$  soient toutes égales. Quelle est la valeur commune de ces normes.
2. Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  tel que les projections orthogonales des  $e_i$  sur  $F$  soient de même norme. Calculer cette norme.

**Exercice 23.**

Soient  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$  une suite croissante de sous-espaces de  $E$  telle que :  $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \dim E_i = i$ . Soit  $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$  une suite décroissante de réels  $\geq 0$ . Décrire l'ensemble des  $x$  de  $E$  tels que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad d(x, E_k) = a_k.$$