

Séries numériques

Exercice 1. Quelques convergences

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $u_n = n \sin(1/n)$ | 2. $u_n = \frac{n^n}{2^n}$ | 3. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ |
| 4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ | 5. $u_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}$ | 6. $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$ |
| 7. $u_n = a^n n!$, $a \in \mathbb{R}$ | 8. $u_n = n e^{-\sqrt{n}}$ | 9. $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1}\right)$ |
| 10. $u_n = \frac{\ln(n^2 + 3)\sqrt{2^n + 1}}{4^n}$ | 11. $u_n = \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$ | |

Exercice 2. Critères de convergence

Etudier les séries de terme général suivant :

- | | |
|--|---|
| 1. $u_n = \frac{n!}{n^{an}}$, $a \in \mathbb{R}$ | 2. $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$ |
| 3. $u_n = \left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$ | 4. $u_n = \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. |

Exercice 3. Développements limités

Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $u_n = \sqrt{\cos \frac{1}{n} - 1}$ | 2. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ |
| 3. $u_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$, $\alpha \geq 0$ | 4. $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$, $a \in \mathbb{R}$ |
| 5. $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$, $a, b \in \mathbb{R}$ | 6. $\frac{1}{n^\alpha} \left((n+1)^{1+1/n} - (n-1)^{1-1/n}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. |

Indication : procéder en effectuant un développement limité du terme général.

Exercice 4. Séries de Bertrand

Etudier, suivant la valeur de α et β , la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

Indication : séparer 3 cas, suivant la position de α par rapport à 1.

- Pour $\alpha > 1$, comparer à une série de Riemann $1/n^\gamma$ avec $1 < \gamma < \alpha$.
- Pour $\alpha = 1$, comparer à une intégrale.
- Pour $\alpha < 1$, comparer encore avec une série de Riemann.

Exercice 5. Séries plus originales

Etudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = 1/n$ si n est un carré, et 0 sinon.
2. $u_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$, avec $a > 0$.

Indications :

- Se ramener à la somme des $1/k^2$, pour des bornes bien choisies.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis, ou faire un développement limité de \arctan au voisinage de $+\infty$ en utilisant la formule $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.

Exercice 6. *Convergence de séries plus ardues*

Etudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} & u_n = \frac{\sin n^2}{n^2} \\ \mathbf{2.} & u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n} \\ \mathbf{3.} & u_n = \frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln n} \end{array}$$

Exercice 7. *Convergence absolue*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n} \int_0^1 t^n f(t) dt$ est absolument convergente.

Indication : étudier la convergence absolue. Utiliser le fait que f est bornée sur $[0, 1]$.

Exercice 8. *Valeur absolue et sinus*

Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{|\sin(n)|}{n}$.

Exercice 9. *ENSI PC*

Quelle est la nature de la série de terme général $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \right)$?

Exercice 10. *ENSI PC*

Soit (u_n) une suite réelle à termes tous non nuls telle que :

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \quad \text{et} \quad \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b.$$

Etudier en fonction de a et b la convergence de la série.

Exercice 11. *Centrale PC**

Montrer que la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$$

converge, puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près de sa somme.

Exercice 12. *Centrale PC*

Etant donnée la suite de terme général :

$$u_n = (n^4 + n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$$

où P est un polynôme réel.

A quelle condition sur P la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 13. *Cauchy-Schwarz généralisé*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Montrer que $\sum (u_n + v_n)^2$ converge, et que l'on a :

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2}$$