

Devoir surveillé

Exercice 1. Cours

1. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.
 - (a) Donner la forme géométrique générale du théorème du rang.
 - (b) Si E est de dimension finie, préciser le théorème du rang.
2. On considère cette matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Donner une base du noyau de la matrice A .
 - (b) Rappeler le théorème du rang pour une matrice et en déduire le rang de A .
 - (c) Donner une base de l'image de cette matrice.
3. Dire ce que vous savez du dénombrement des objets suivants :
 - (a) p -uplets d'un ensemble F de cardinal n .
 - (b) Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini E de cardinal p dans un ensemble fini F de cardinal n .
 - (c) Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini E de cardinal p .
 - (d) Nombre d'arrangements à p éléments (ou p -uplets d'éléments distincts) d'un ensemble fini F de cardinal n .
 - (e) Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini E de cardinal p dans un ensemble fini F de cardinal n .
 - (f) Nombre de parties à p éléments (ou p -combinaisons) d'un ensemble de cardinal n .

Exercice 2. Etude d'un endomorphisme nilpotent à l'aide de changements de bases

On munit \mathbb{R}^3 de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ et l'on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.
 (b) Calculer $(I_3 - M)(I_3 + M + M^2)$, en déduire que $I_3 - M$ est inversible et préciser son inverse.
2. (a) Quelle est la dimension du noyau de u ? Quel est le rang de u ?
 (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } u^2$, alors la famille $(x, u(x), u^2(x))$ forme une base de \mathbb{R}^3 . Que peut-on en déduire concernant la famille $(x, -u(x), u^2(x))$ quand $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } u^2$?
3. On pose $e'_1 = u^2(e_3)$, $e'_2 = -u(e_3)$ et $e'_3 = e_3$.

- (a) Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Calculer la matrice de passage P de la base e à la base e' .
- (b) Calculer P^2 et en déduire P^{-1} .
- (c) Préciser la matrice M' de u dans la base e' .
- (d) On désigne par σ l'endomorphisme dont la matrice dans la base e est P . Indiquer à quel type particulier d'endomorphismes appartient σ ainsi que les sous-espaces qui lui sont associés.
- (e) Trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de σ est :

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Dénombrements

1. Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.
 - (a) Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?
 - (b) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?
 - (c) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont en mauvais termes et ne veulent plus se voir ?
2. Dans une classe de dix élèves, de combien de façons peut-on choisir trois élèves pour tenir les rôles de Cléante, Valère et Harpagon ?
3. Sur une feuille quadrillée, on a dessiné un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large. En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?
4. Anagrammes.
Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, BANANA.
5. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Le jeu est constitué de 8 coeurs, 8 piques, 8 trèfles et 8 carreaux de hauteurs 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.
Combien de tirages différents peut-on obtenir :
 - (a) sans imposer de contraintes sur les cartes ;
 - (b) contenant 5 carreaux ou 5 piques ;
 - (c) contenant 2 carreaux et 3 piques ;
 - (d) contenant au moins un roi ;
 - (e) contenant au plus un roi ;
 - (f) contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques (le roi de pique peut en faire partie).