Corrigé du concours Blanc

1 Développements limités, asymptotiques

1. (a) Calculer les développements limités suivants en 0 :

$$\textbf{a)}\ \cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\textbf{b)}\ 1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - 3x^3 + o(x^3)$$

$$\textbf{c)}\ \ln(\cos(x))$$

On commence par écrire :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

On écrit alors le développement limité du ln en 1 :

$$\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Pour $y(x) = \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, on a donc $y(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $y(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ d'où :

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} y(x) - \frac{y(x)^2}{2} + o(x^4)$$

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\textbf{d)}\ (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$$

Or $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))$.
On pose alors $y(x) = x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2))$ et l'on a :

$$y^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^4)$$

On obtient alors par composition :

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

(b) Calculer les développements limités suivants :

$$\textbf{a)}\ \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2}$$

On pose $x = 2 + h$ et l'on se ramène ainsi au développement limité en 0 de :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{h}{2}}$$

Or $\sqrt{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)$, d'où :

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}h - \frac{1}{32}h^2 + \frac{1}{128}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}h-\frac{\sqrt{2}}{32}h^2+\frac{\sqrt{2}}{128}h^3+o(h^3)$$

b) $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en -2

On pose $x=-2+h$ et l'on se ramène au développement limité en 0 de :

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2}=\frac{1}{5-4h+h^2}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{4}{5}h+\frac{1}{5}h^2}$$

On rappelle que $\frac{1}{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1-y+y^2-y^3+o(y^3)$, on en déduit avec $y(h)=-\frac{4}{5}h+\frac{1}{5}h^2$:

$$y^2(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{16}{25}h^2-\frac{8}{25}h^3+o(h^3)$$

$$y^3(h) \underset{h\to 0}{=} -\frac{64}{125}h^3+o(h^3)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5}\left(1+\frac{4}{5}h-\frac{1}{5}h^2+\frac{16}{25}h^2-\frac{8}{25}h^3+\frac{64}{125}h^3+o(h^3)\right)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5}+\frac{4}{25}h+\frac{11}{125}h^2+\frac{24}{625}h^3+o(h^3)$$

2. Etude d'une fonction f en 0

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f \ : \ x\in\mathbb{R} \quad \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

(a) Calculons le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x\mapsto \frac{x}{e^x-1}$:

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)$$

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$$

(b) Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, <u>sans nouveaux calculs</u>, que :
- f est continue en 0 ?
- f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?

  La réponse à ces deux premières questions est positive : il est équivalent d'être dérivable en 0 et d'admettre un $DL_1(0)$. On peut ainsi déterminer la valeur $f'(0)=-\frac{1}{2}$.
- f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?

  En revanche, l'existence d'un $DL_2(0)$ ne nous dit rien quand à la dérivabilité de f à l'ordre 2 : il existe en effet des fonctions qui admettent un $DL_2(0)$ mais qui ont une dérivée qui n'est pas continue en 0 (exemple : $x\mapsto x^3\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$).

(c) Calculons la dérivée f' pour $x\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}$$

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{x^2}{2}-x(1+x)+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

Donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -\frac{1}{2}$ et f' est donc continue en 0. Comme f' est continue partout ailleurs, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Développement asymptotique d'une suite

(a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, on la notera x_n.

On note g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

La fonction g est dérivable de dérivée $g'(x) = xe^x$, donc g est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

Comme $g(0) = 0$, on déduit des variations de g que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On remarque que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$. Cette dérivée est de signe négatif (y compris en 0 d'après l'énoncé) donc f est décroissante.

Or $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection continue.Ainsi, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n = f^{-1}(n)$.

(b) Déterminer le sens de variations de la suite (x_n) ainsi définie, et sa limite.

Puisque f est une bijection continue décroissante de $]-\infty, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, on sait que f^{-1} est décroissante, que sa limite en 0 est $+\infty$ et surtout que sa limite en $+\infty$ est $-\infty$.

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite $-\infty$.

(c) Montrer, à l'aide de l'équation $f(x_n) = n$, que $x_n \underset{n \to \infty}{\sim} -n$.

On sait que $\dfrac{x_n}{e^{x_n} - 1} = n$ donc $\dfrac{x_n}{-n} = 1 - e^{x_n}$. Ainsi, puisque $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$, $\dfrac{x_n}{-n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

(d) On définit la suite $y_n = n + x_n$ de sorte que $x_n = -n + y_n$ où $y_n \underset{n \to \infty}{=} o(n)$.

Grâce à l'équation vérifiée par x_n, on obtient $\dfrac{-n + y_n}{e^{-n+y_n} - 1} = n$, donc $-n + y_n = n(e^{-n+y_n} - 1)$ c'est à dire que $y_n = ne^{-n+y_n}$.

Puisque $y_n \underset{n \to \infty}{=} o(n)$, on a $-n + y_n \underset{n \to \infty}{\sim} -n$. Ainsi, on a pour n assez grand : $-n + y_n \leq -\dfrac{n}{2}$ (prendre $\epsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de la limite de $\dfrac{-n + y_n}{-n}$ qui vaut 1).

On en déduit que $0 \leq y_n \leq ne^{-\frac{n}{2}}$ et donc $y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ par encadrement.

Enfin, on écrit $y_n = e^{y_n} ne^{-n}$. Puisque $e^{y_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$, on a donc $y_n \underset{n \to \infty}{\sim} ne^{-n}$.

(e) Pour obtenir un terme supplémentaire du développement asymptotique, on écrit $y_n = ne^{-n} + z_n$ où $z_n \underset{n \to \infty}{=} o(ne^{-n})$. L'équation vérifiée par y_n nous donne :

$$ne^{-n} + z_n = e^{ne^{-n} + z_n} ne^{-n}$$

$$z_n = ne^{-n}(e^{ne^{-n} + z_n} - 1)$$

Comme $ne^{-n} + z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, on a $e^{ne^{-n} + z_n} \underset{n \to \infty}{=} 1 + ne^{-n} + z_n + o(ne^{-n} + z_n)$.

Puisque $z_n \underset{n \to \infty}{=} o(ne^{-n})$, cela signifie simplement $e^{ne^{-n} + z_n} \underset{n \to \infty}{=} 1 + ne^{-n} + o(ne^{-n})$.

On déduit alors de l'équation ci-dessus :

$$z_n \underset{n \to \infty}{=} ne^{-n}(ne^{-n} + o(ne^{-n}))$$

$$z_n \underset{n \to \infty}{=} n^2 e^{-2n} + o(n^2 e^{-2n})$$

2 Matrices et applications linéaires

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commmutent avec leur transposée, c'est à dire qui vérifient la relation $M\,{}^tM = {}^tMM$ (1).

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire que M vérifie la relation (1).

Première partie

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On notera en particulier : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On calcule : ${}^tAA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad A\ {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad {}^tCC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad C\ {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Donc A et C vérifient la relation (1).
2. $A^2 = I_2$, donc les puissances de A sont faciles à décrire : on démontre aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^{2n} = I_2$ et $A^{2n+1} = A$. Ainsi, puisque I_2 et A vérifient (1), c'est aussi le cas de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. A est inversible puisque $A^2 = I_2$, et son inverse est $A^{-1} = A$.
   Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est A.
4. On a $u(\vec{i}) = \vec{j}$ et $u(\vec{j}) = \vec{i}$.
   $u \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique $A^2 = I_2$ donc $u \circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$ et u est une symétrie. L'ensemble de ses vecteurs invariants est $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$.
   Il s'agit donc du sous espace de dimension 1 engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   Dans la suite, on notera $U = A + I$.
5. On vérifie par le calcul que ${}^tUU = U\ {}^tU = U^2 = 2U$, donc la matrice U vérifie la relation (1).
   Montrons par récurrence (forte) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 2^{n-1}U$.
   La relation est vérifiée aux rangs $n = 1$ et $n = 2$.
   Supposons que $n \geq 2$, et que la relation est vérifiée au rang n. Comme $U^2 = 2U$, on a :
   $$U^{n+1} = U^{n-1}U^2 = U^{n-1}2U = 2U^n = 2^nU.$$
   La relation est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On a donc ${}^tU^nU^n = 2^{n-1}\ {}^tU2^{n-1}U = 2^{2n-2}\ {}^tUU = 2^{2n-2}U\ {}^tU = 2^{n-1}U2^{n-1}\ {}^tU = U^n\ {}^tU^n$, et U^n vérifie (1) pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient (1).
6. Calculons les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée :
   $(A + C)\ {}^t(A + C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad {}^t(A + C)(A + C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel puisque $A \in E_2$, $C \in E_2$ et $A + C \notin E_2$.
7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $M\ {}^tM = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$ et $M\ {}^tM = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$, donc $M \in E_2$ si et seulement si le système d'équations suivant est vérifié :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} ab+cd &=& ac+bd \\ a^2+b^2 &=& c^2+d^2 \\ c^2+d^2 &=& b^2+d^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (b-c)(b+c) &=& 0 \\ (b-c)(a-d) &=& 0 \end{array} \right.$$
   Ceci est vérifié dans deux cas et deux cas seulement : si $b = c$, ou bien si $b = -c$ et que $a = d$. Les deux formes possibles des matrices de E_2 sont $\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$.
8. E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels, admettant respectivement pour bases
   $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$
9. Etant données M et N deux matrices de E_2, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple, on constate que $MN = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin E_2$ donc le produit de deux matrices de E_2 n'est pas nécessairement dans E_2.

Deuxième partie

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$ et $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = Mat_{B'}(h)$.
L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_3.

10. Représentons la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
11. Calculons $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tSS = S\,{}^tS = I_3$ et ${}^tS^2S^2 = S^2\,{}^tS^2 = I_3$ donc S et S^2 sont dans E_3.
12. Calculons, pour trois réels a, b et c, avec $R = aI_3 + bS + cS^2$:

$$ {}^tRR = (aI_3 + b\,{}^tS + c\,{}^tS^2)(aI_3 + bS + cS^2) $$

$$ {}^tRR = a^2I_3 + abS + acS^2 + ba\,{}^tS + b^2I_3 + bcS + ca\,{}^tS^2 + cb\,{}^tS + c^2I_3 $$
$$ {}^tRR = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ab + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2) $$

$$ R\,{}^tR = (aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + b\,{}^tS + c\,{}^tS^2) $$
$$ R\,{}^tR = a^2I_3 + ab\,{}^tS + ac\,{}^tS^2 + baS + b^2I_3 + bc\,{}^tS + caS^2 + cbS + c^2I_3 $$
$$ R\,{}^tR = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ab + bc)(S + {}^tS) + ac(S^2 + {}^tS^2) $$

On a donc : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, aI_3 + bS + cS^2 \in E_3$.
13. E_3 contient donc $F = \mathrm{Vect}(I_3, S, S^2)$. Les matrices I_3, S et S^2 forment une famille libre, donc ce sous-espace est de dimension 3.
14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle :
Soient $R_1 = a_1I_3 + b_1S + c_1S^2$ et $R_2 = a_2I_3 + b_2S + c_2S^2$ deux éléments de F, on a alors

$$ R_1R_2 = a_1a_2I_3 + a_1b_2S + a_1c_2S^2 + b_1a_2S + b_1b_2S^2 + b_1c_2S^3 + c_1a_2S^2 + c_1b_2S^3 + c_1c_2S^4 $$

Or $S^3 = -I_3$ donc $S^4 = -S$ et l'on peut simplifier :

$$ R_1R_2 = (a_1a_2 - b_1c_2 - b_2c_1)I_3 + (a_1b_2 + a_2b_1 - c_1c_2)S + (a_1c_2 + b_1b_2 + c_1a_2)S^2 $$

Donc $R_1R_2 \in F$ et F est bien stable par multiplication matricielle.

Troisième partie

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $B'' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$.
On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $Mat_{B''}(u) = B$.
L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_4.

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.
Calculons :

$$ {}^tBB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix} $$

$$B\ {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ligne 1 colonne 2 du résultat, on voit qu'une condition nécessaire pour avoir $B \in E_4$ est que $a+1=0$ donc $a=-1$. Réciproquement, si $a=-1$, on observe que $B \in E_4$. Dans toute la suite, on pose $a=-1$.

16. Calculons $\ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{ccc} x-y+z+t & = & 0 \\ -x+t & = & 0 \\ x-t & = & 0 \\ x+y-z+t & = & 0 \end{array} \right\}$

    A l'aide du pivot de Gauss, on obtient un système équivalent avec trois équations $x=0$, $y=z$ et $t=0$.

    Ainsi, $\ker(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

    D'après le théorème du rang, Im (u) est donc de dimension 3.

    Or Im (u) est l'espace engendré par les colonnes de B dans $\mathbb{R}^4$. Comme la troisième colonne est l'opposée de la deuxième, Im (u) est engendré par la famille des colonnes n°1, 2 et 4 de B : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

    Cette famille est une base de Im (u) puisqu'elle est génératrice de cardinal 3.

17. Calculons $u(\vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}-\vec{e_4}) = -2\vec{e_1}-2\vec{e_2}+2\vec{e_3}+2\vec{e_4}$. En notant $v = \vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}-\vec{e_4}$, on a donc $u(v) = -2v$.

18. Calculonsr $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pour ces deux vecteurs, l'image par u est égale à leur double.

19. On note $C = (\vec{e_2}+\vec{e_3}, \vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}-\vec{e_4}, \vec{e_1}+\vec{e_4}, \vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3}-\vec{e_4})$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.

    On déduit des questions précédentes $Mat_C(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

    En notant $P = Mat_{B''}(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base B'' à la base C,

    on a $B = PMat_C(u)P^{-1}$, où $Mat_C(u)$ est une matrice diagonale.

20. On prouve par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B^n = PMat_C(u)^n P^{-1}$.

    Ceci est vrai au rang 1.

    Supposons que c'est vrai au rang n, on a alors

    $$B^{n+1} = B^n B = PMat_C(u)^n P^{-1} PMat_C(u)P^{-1} = PMat_C(u)^n Mat_C(u)P^{-1} = PMat_C(u)^{n+1}P^{-1}$$

    et la propriété est héréditaire.

    On remarque enfin que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Mat_C(u)^{n+2} = 4Mat_C(u)^n$ et l'on en déduit aisément que $B^{n+2} = 4B^n$. Ainsi, on montre par récurrence sur l'entier naturel p que $B^{2p} = 4^{p-1}B^2$ et $B^{2p+1} = 4^p B$.