Concours Blanc

1 Développements limités, asymptotiques

1. (a) Calculer les développements limités suivants en 0 :

a) $\cos(x) - e^x$ à l'ordre 3 **b**) $1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7$ à l'ordre 3
c) $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 3 **d**) $(1 + x)^x$ à l'ordre 4.

(b) Calculer les développements limités suivants :

a) $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 **b**) $\dfrac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 3 en -2

2. Etude d'une fonction f en 0

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\ :\ x \in \mathbb{R} \quad \mapsto \quad \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.
(b) Peut-on déduire du développement limité de la question précédente, <u>sans nouveaux calculs</u>, que :
— f est continue en 0 ?
— f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
— f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?
(c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Développement asymptotique d'une suite

(a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, on la notera x_n.
(b) Déterminer le sens de variations de la suite (x_n) ainsi définie, et sa limite.
(c) Montrer, à l'aide de l'équation $f(x_n) = n$, que $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} -n$.
(d) On définit la suite $y_n = n - x_n$ de sorte que $x_n = -n + y_n$ où $y_n \underset{n\to\infty}{=} o(n)$. A l'aide de l'équation vérifiée par x_n, montrer d'abord que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, puis trouver un équivalent de y_n quand n tend vers $+\infty$.
(e) Plus difficile : donner un terme supplémentaire du développement asymptotique de (x_n).

2 Matrices et applications linéaires

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commmutent avec leur transposée, c'est à dire qui vérifient la relation $M\ {}^tM =\ {}^tMM$ (1) (on dira si c'est le cas que M vérifie la relation (1)).

Première partie

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On notera en particulier : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).
2. Calculer A^2. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.
Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est A.
4. Préciser les valeurs de $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble de ses vecteurs invariants.
Dans la suite, on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \alpha_n \in \mathbb{R}$, $U^n = \alpha_n U$.
   En déduire que toute ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1).
   On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient (1).
6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.
   En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2.
8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels dont on donnera pour chacun une base.
9. Etant données M et N deux matrices de E_2, a-t-on nécessairement $MN \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

Deuxième partie

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$ et $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = Mat_{B'}(h)$.
L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_3.

10. Représenter la matrice S.
11. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.
12. Montrer que pour tous réels a, b et c, la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3.
13. En déduire que E_3 contient un sous-espace vectoriel de dimension 3 constitué de matrices du type décrit à la question précédente. On notera F ce sous-espace.
14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

Troisième partie

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $B'' = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$.
On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $Mat_{B''}(u) = B$.
L'ensemble des matrtices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_4.

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.
    Dans toute la suite, on pose $a = -1$.
16. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de Im (u).
17. Calculer $u(\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} - \vec{e_4})$. Que remarque-t-on ?
18. Calculer $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu.
19. On note $C = (\vec{e_2} + \vec{e_3}, \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} - \vec{e_4}, \vec{e_1} + \vec{e_4}, \vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3} - \vec{e_4})$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.
    Déduire des questions précédentes $Mat_C(u)$.
    En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale. On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}.
20. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et B^2.