

## Déterminants

**Exercice 1.** *Manipulation lignes*

Montrer que  $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$  sans le développer.

**Exercice 2.** *Déterminant trigonométrique*

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

**Exercice 3.** *Déterminants  $3 \times 3$  et  $4 \times 4$*

Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4.** *Déterminant de la transposée*

Soit  $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  antisymétrique. Montrer que  $\det A = 0$ .

**Exercice 5.** *Déterminants de taille  $n$*

1. Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

*Ind.* Exprimer  $\Delta_n$  en fonction de  $\Delta_{n-1}$ .

**Exercice 6.** *Fonction affine*

Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ . On note  $A(x)$  la matrice dont le terme général est  $a_{i,j} + x$ .

1. Montrer que la fonction  $x \mapsto \det(A(x))$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour  $a$  et  $b$  deux réels distincts et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

**Exercice 7.** *Déterminant de Vandermonde*

Soient  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ . Montrer que :

$$\begin{aligned} V_n(a_1, \dots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

*Ind.* Procéder par récurrence sur  $n$  en remplaçant la dernière colonne par  ${}^t(1, X, \dots, X^{n-1})$ .

**Exercice 8.** *Déterminant circulant*

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des nombres complexes, et  $\omega = e^{2i\pi/n}$ , et  $A$  et  $M$  les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer  $\det(AM)$  et en déduire  $\det(A)$ .