

Fonctions de deux variables

Exercice 1. Lignes de niveau

Représenter les lignes de niveau (c'est-à-dire les solutions (x, y) de l'équation $f(x, y) = k$) pour :

$$f_1(x, y) = y^2, \text{ avec } k = -1 \text{ et } k = 1 \quad f_2(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{8 - x^2 y^2} \text{ avec } k = 2.$$

Exercice 2. Lignes de niveau à nouveau

Représenter les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x + y - 1$
2. $f(x, y) = e^{y-x^2}$
3. $f(x, y) = \sin(xy)$

Exercice 3. Calcul de dérivées partielles

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x, y) = e^x \cos y$.
2. $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$.
3. $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Exercice 4. Composition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 5. Exemples

Démontrer que les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$;
2. $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 6. Points critiques

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x, y) \mapsto xy(x + y - 1)$$

$$g : (x, y) \mapsto xye^{-(x^2 + y^2)}$$

Exercice 7. Extrema

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

- (a) Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f .

- (b) Déterminer un équivalent de $f(x, x) - f(0, 0)$ et de $f(x, 0) - f(0, 0)$ lorsque x tend vers 0.
 La fonction f présente-t-elle un extremum en $(0, 0)$?
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 + x - 2y$$

- (a) Déterminer l'unique point critique de g et son image par g .
 (b) Développer :

$$E = 3 \left(y + \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \right) + \frac{11}{3} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2$$

- (c) Que peut-on en déduire sur la nature du point critique ?

Exercice 8. Fonctions homogènes

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

- On définit, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = f(tx, ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
- On suppose désormais que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.
 (a) Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)y.$$

- (b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y.$$

Exercice 9. EDP dans le bon sens

Etant données deux fonctions g_0 et g_1 d'une variable réelle, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = g_0\left(\frac{y}{x}\right) + xg_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Justifier que f est de classe C^2 , puis prouver que

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Exercice 10. En détails

On cherche toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a,$$

où a est un réel.

- On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(u, v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right).$$

En utilisant le théorème de composition, montrer que $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$.

- Intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f .
- En déduire les solutions de l'équation initiale.