

Fonctions usuelles

PCSI

1 Bijections

1.1 Définition

Définition

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow J$ une fonction. On dit que f est une **bijection de I sur J** si, pour tout $y \in J$, l'équation

$$f(x) = y, \quad \text{d'inconnue } x \in I,$$

admet une **unique solution** $x \in I$.

Autrement dit, tout élément y de l'ensemble d'arrivée J est atteint par f , et il l'est **une seule fois**. C'est cette double exigence — existence *et* unicité — qu'il faut vérifier à chaque fois.

Exemple

La fonction $f(x) = x^2$ n'est **pas** une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$: l'équation $x^2 = 4$ admet deux solutions ($x = 2$ et $x = -2$), donc il n'y a pas unicité. En revanche, en restreignant le domaine à $[0, +\infty[$, l'équation $x^2 = y$ (avec $y \geq 0$) admet l'unique solution $x = \sqrt{y}$: f restreinte à $[0, +\infty[$ est donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Remarque

C'est un réflexe essentiel à acquérir : quand une fonction n'est pas bijective sur son domaine naturel, on peut souvent la rendre bijective en **restreignant** son ensemble de départ (et éventuellement d'arrivée) à un intervalle sur lequel l'existence et l'unicité sont assurées.

1.2 Bijection réciproque

Définition

Si f est une bijection de I sur J , on appelle **bijection réciproque** de f la fonction, notée f^{-1} , définie par :

$$f^{-1} : J \longrightarrow I, \quad f^{-1}(y) = \text{l'unique solution } x \in I \text{ de } f(x) = y.$$

Par construction, f^{-1} est elle-même une bijection de J sur I , et l'on a les deux relations fondamentales :

$$\forall x \in I, \quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in J, \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Attention

Ne pas confondre f^{-1} (bijection réciproque) avec $\frac{1}{f}$ (inverse pour la multiplication). Ce sont deux objets totalement différents, malgré la notation similaire.

1.3 Exemples de résolution de l'équation $f(x) = y$

La méthode pour déterminer si f est une bijection de I sur J , et pour expliciter f^{-1} le cas échéant, consiste à résoudre l'équation $f(x) = y$ **d'inconnue x** , le réel $y \in J$ jouant le rôle d'un **paramètre**.

Exemple 1 – Fonction homographique

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Pour $y \in \mathbb{R}$, résolvons $f(x) = y$ d'inconnue $x \neq 3$:

$$\frac{2x+1}{x-3} = y \iff 2x+1 = y(x-3) \iff 2x+1 = yx-3y \iff x(2-y) = -3y-1.$$

- Si $y = 2$: l'équation devient $0 = -7$, impossible : **aucune solution**.
- Si $y \neq 2$: $x = \frac{3y+1}{y-2}$, et on vérifie que cette valeur est bien différente de 3 : c'est l'**unique solution**.

Ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ sur $J = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, de réciproque :

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}.$$

Exemple 2 – Restriction nécessaire

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$, définie sur $I = [1, +\infty[$. On écrit $f(x) = (x-1)^2 + 2$. Pour $y \in \mathbb{R}$, résolvons $f(x) = y$ d'inconnue $x \geq 1$:

$$(x-1)^2 + 2 = y \iff (x-1)^2 = y-2.$$

- Si $y < 2$: pas de solution réelle (un carré ne peut pas être négatif).
- Si $y \geq 2$: $(x-1)^2 = y-2$ donne $x-1 = \sqrt{y-2}$ ou $x-1 = -\sqrt{y-2}$. Comme $x \geq 1$, on a $x-1 \geq 0$: seule la solution $x = 1 + \sqrt{y-2}$ convient. C'est bien l'**unique** solution dans I .

Ainsi f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $J = [2, +\infty[$, de réciproque :

$$f^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y-2}.$$

Remarque

On voit sur l'exemple 2 pourquoi la restriction du domaine à $[1, +\infty[$ était nécessaire : sur $\mathbb{R}$ tout entier, l'équation $(x-1)^2 = y-2$ aurait admis **deux** solutions pour $y > 2$, et il n'y aurait donc pas eu unicité.

1.4 Théorème de la bijection

En pratique, résoudre explicitement $f(x) = y$ est souvent impossible (par exemple dès que f fait intervenir un polynôme de degré ≥ 3 sans racine évidente). Le théorème suivant permet d'affirmer l'existence d'une bijection réciproque **sans avoir à résoudre l'équation**.

Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I . Alors :

1. f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
2. les bornes de J s'obtiennent en calculant les limites (ou les valeurs) de f aux bornes de I ;
3. la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est elle-même continue et strictement monotone sur J , de **même sens de variation** que f .

Exemple

Soit $f(x) = x^3 + x$, définie sur $I = \mathbb{R}$.

- f est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout x : f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

On ne dispose ici d'**aucune formule explicite** pour f^{-1} (on ne sait pas résoudre $x^3 + x = y$ « à la main »). Le théorème garantit malgré tout que f^{-1} existe, et qu'elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque

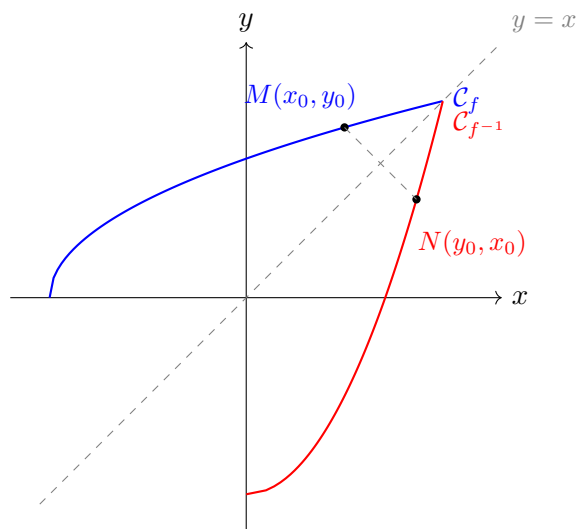
C'est là tout l'intérêt du théorème : il assure l'**existence** d'objets (les fonctions réciproques usuelles comme $\ln$, $\arcsin$, $\arctan$, etc.) que l'on ne saurait pas construire « à la main » en résolvant une équation.

1.5 Représentation graphique

Symétrie des courbes

Si f est une bijection de I sur J , alors les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** (la première bissectrice du repère).

En effet, un point $M(x_0, y_0)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y_0 = f(x_0)$, c'est-à-dire si et seulement si $x_0 = f^{-1}(y_0)$, c'est-à-dire si et seulement si le point $N(y_0, x_0)$ appartient à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Or $N(y_0, x_0)$ est précisément le symétrique de $M(x_0, y_0)$ par rapport à la droite $y = x$.



Remarque

Pratiquement : pour tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$, il suffit de tracer le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $y = x$ — sans calculer la moindre expression de f^{-1} .

1.6 Dérivabilité de la réciproque : approche graphique

On souhaite comprendre, **graphiquement**, en quels points f^{-1} est dérivable.

Soit $M(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{C}_f$ (avec $y_0 = f(x_0)$), et supposons que $\mathcal{C}_f$ admette en M une tangente T de coefficient directeur $f'(x_0)$. Par la symétrie par rapport à $y = x$, la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ admet au point symétrique $N(y_0, x_0)$ une tangente T' , symétrique de T par rapport à $y = x$.

Attention

Or, par symétrie par rapport à la droite $y = x$:

- une droite **non horizontale et non verticale** de coefficient directeur $m \neq 0$ a pour symétrique une droite de coefficient directeur $\frac{1}{m}$;
- une droite **horizontale** ($m = 0$) a pour symétrique une droite **verticale** — et c'est le **seul** cas où le symétrique d'une droite n'est pas le graphe d'une fonction dérivable en ce point (une tangente verticale correspond à un « coefficient directeur infini »).

On en déduit la règle suivante :

- si $f'(x_0) \neq 0$, la tangente T n'est pas horizontale, donc son symétrique T' n'est pas verticale : f^{-1} est dérivable en y_0 , et T' a pour coefficient directeur $\frac{1}{f'(x_0)}$, c'est-à-dire

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))};$$

- si $f'(x_0) = 0$, la tangente T est horizontale, donc son symétrique T' est **verticale** : f^{-1} **n'est pas dérivable** en y_0 (sa courbe admet en N une tangente verticale).

Reformulons proprement ce que l'on vient d'établir, en notant x le point de J où l'on étudie la dérivabilité de f^{-1} (et non plus y_0 , pour bien voir f^{-1} comme une fonction de la variable x) :

Dérivabilité de la bijection réciproque

Soit f une bijection de I sur J , dérivable sur I . Soit $x \in J$. Alors :

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } x \iff f'(f^{-1}(x)) \neq 0.$$

Dans ce cas :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

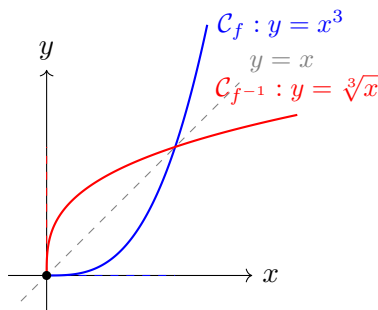
Remarque

Le terme $f'(f^{-1}(x))$ qui apparaît dans l'hypothèse et dans la formule est la dérivée de f prise **au point** $f^{-1}(x) \in I$ — c'est-à-dire au point de I qui correspond à x par la bijection —, et non la dérivée de f prise en x (qui n'aurait d'ailleurs aucun sens si $x \notin I$).

Exemple

Soit $f(x) = x^3$, définie sur $I = [0, +\infty[$. On a $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ sur I , avec égalité seulement en 0 : f est donc strictement croissante sur I (théorème de la bijection), et réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Sa réciproque est la fonction racine cubique restreinte aux réels positifs, $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, définie sur $[0, +\infty[$.

En $x_0 = 0$, on a $f'(0) = 0$: la courbe de f admet en $(0, 0)$ une tangente **horizontale** (l'axe des abscisses). Par symétrie, la courbe de f^{-1} admet en $(0, 0)$ une tangente **verticale** (l'axe des ordonnées) : la fonction racine cubique **n'est pas dérivable** en 0, bien qu'elle y soit définie et continue.



Remarque

Ce résultat sera repris systématiquement dans la suite du chapitre : pour chaque fonction réciproque usuelle ($\ln$, $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$...), on retrouvera ce même argument graphique pour déterminer les points où la dérivabilité est en défaut.

2 Rappels de trigonométrie

2.1 Cercle trigonométrique

Définition

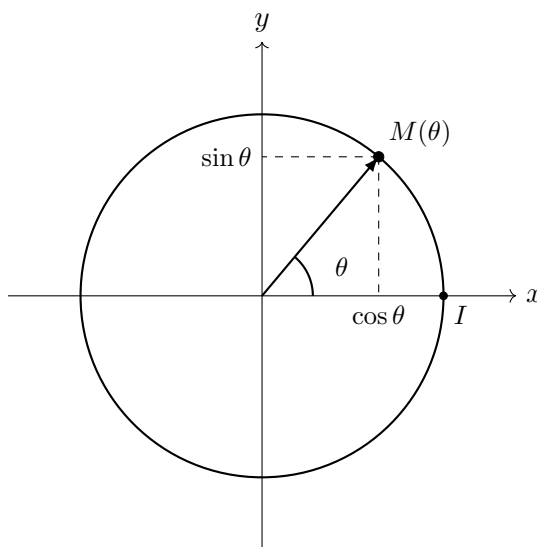
Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout réel θ , on associe le point $M(\theta)$ du cercle trigonométrique obtenu en partant du point $I(1, 0)$ et en parcourant sur le cercle une longueur d'arc égale à θ (dans le sens direct, c'est-à-dire inverse des aiguilles d'une montre, si $\theta > 0$; dans le sens indirect si $\theta < 0$).

Le réel θ ainsi défini est une mesure en **radian** de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Les coordonnées du point $M(\theta)$ sont appelées **cosinus** et **sinus** de θ :

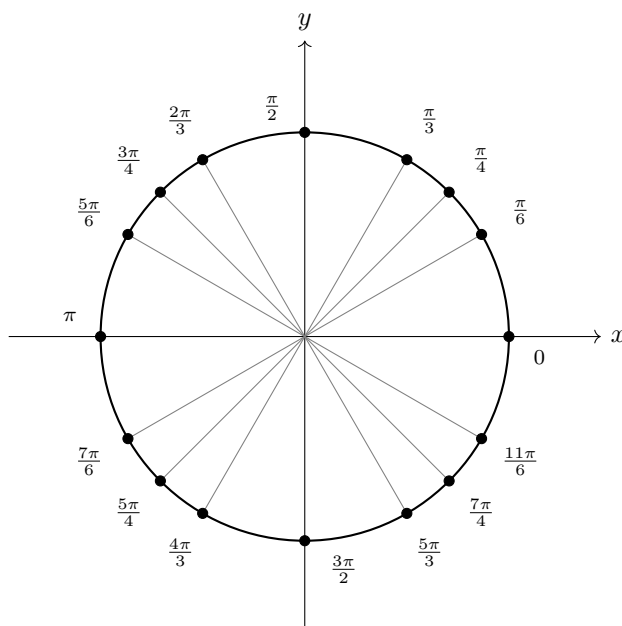
$$M(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta).$$



2.2 Valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Ces cinq valeurs sont à connaître **parfaitement** : elles reviendront constamment dans l'année. Le cercle ci-dessous permet de visualiser l'ensemble des angles obtenus à partir de ces valeurs remarquables par symétrie.



2.3 Relations fondamentales

Relations de base

Pour tout réel θ :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\text{définie si et seulement si } \cos \theta \neq 0).$$

De plus, $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques :

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta, \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta.$$

Remarque

La relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ traduit simplement le fait que $M(\theta)$ appartient au cercle **de rayon 1** (théorème de Pythagore). La 2π -périodicité vient du fait qu'un tour complet du cercle ramène au même point $M(\theta)$.

2.4 Angles associés

Les formules suivantes s'obtiennent en observant les symétries du point $M(\theta)$ sur le cercle trigonométrique.

Formules des angles associés

Pour tout réel θ :

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos \theta, & \sin(-\theta) &= -\sin \theta, \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta, & \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta, \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta, & \sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Justification graphique. Le point $M(-\theta)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport à l'axe (Ox) ; le point $M(\pi - \theta)$ est son symétrique par rapport à l'axe (Oy) ; le point $M(\pi + \theta)$ est son symétrique par rapport à O ; enfin le point $M(\frac{\pi}{2} - \theta)$ est son symétrique par rapport à la droite $y = x$.

Remarque

On retrouve ici la **même droite** $y = x$ que dans la partie 1 sur les bijections réciproques ! C'est cohérent : échanger $\cos \theta$ et $\sin \theta$ (les deux coordonnées de $M(\theta)$) revient exactement à faire la symétrie du point par rapport à $y = x$.

Remarque

On peut retrouver les formules avec $\frac{\pi}{2} + \theta$ en combinant celles ci-dessus, sans les apprendre par cœur : en écrivant $\frac{\pi}{2} + \theta = \pi - (\frac{\pi}{2} - \theta)$, on obtient

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta.$$

2.5 La fonction tangente

Définition

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta \neq 0$, on définit

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

La fonction tangente est donc définie sur

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Remarque

Contrairement à $\cos$ et $\sin$, qui sont 2π -périodiques, la fonction $\tan$ est **π -périodique** :

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta.$$

En effet, d'après les formules des angles associés (2.4), $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$: les deux signes « $-$ » se compensent dans le quotient.

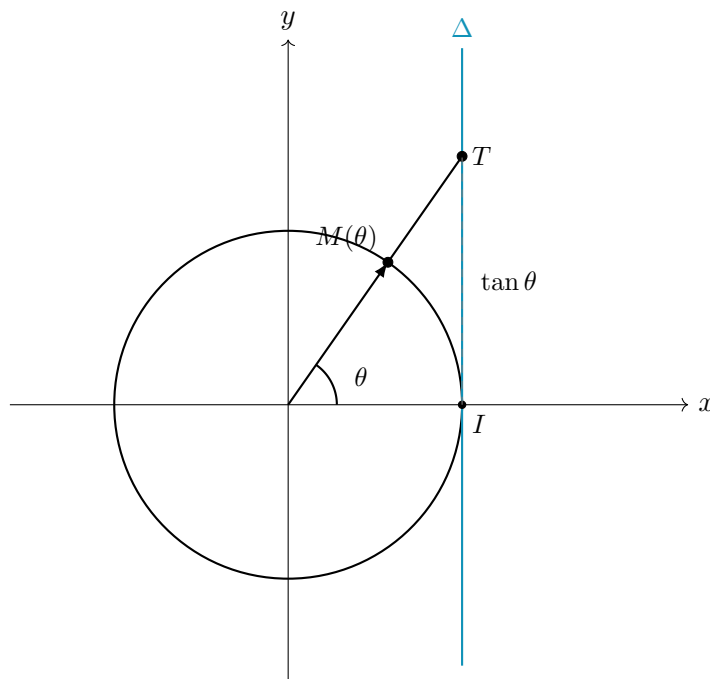
Représentation sur le cercle trigonométrique. On trace la droite Δ tangente au cercle trigonométrique au point $I(1, 0)$, c'est-à-dire la droite verticale d'équation $x = 1$ — d'où le nom de la fonction.

Lecture de $\tan \theta$ sur le cercle

Soit θ tel que $\cos \theta \neq 0$. La droite $(OM(\theta))$ n'est alors pas parallèle à Δ : elle coupe Δ en un unique point T , dont l'ordonnée vaut exactement $\tan \theta$.

Justification. La droite $(OM(\theta))$ se paramètre par $(t \cos \theta, t \sin \theta)$, $t \in \mathbb{R}$. Elle coupe Δ (d'équation $x = 1$) lorsque $t \cos \theta = 1$, soit $t = \frac{1}{\cos \theta}$ (possible car $\cos \theta \neq 0$) ; l'ordonnée du

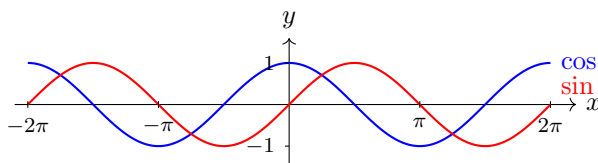
point d'intersection est alors $t \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$.



Remarque

Quand $\cos \theta = 0$ (c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$), la droite $(OM(\theta))$ est verticale, donc **parallèle** à Δ : elle ne la coupe pas. On retrouve ainsi géométriquement le fait que $\tan \theta$ n'est pas défini en ces points.

2.6 Graphes de sin, cos et tan



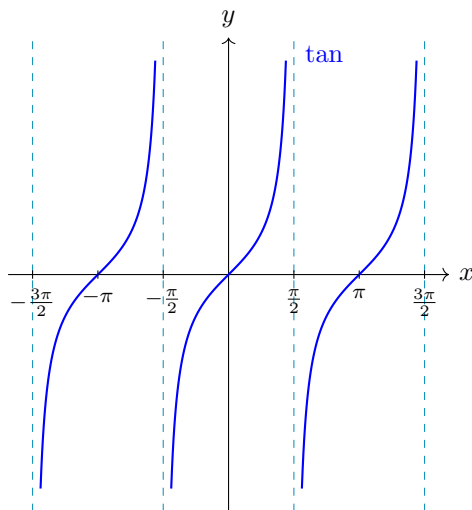
Remarque

On retrouve graphiquement la 2π -périodicité, la parité de $\cos$ (courbe symétrique par rapport à l'axe (Oy)) et l'imparité de $\sin$ (courbe symétrique par rapport à O).

On observe également que les deux courbes se déduisent l'une de l'autre par une simple translation **horizontale** : la courbe de $\cos$ est l'image de celle de $\sin$ par la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$. Cela provient de la formule (déjà établie plus haut)

$$\cos \theta = \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right),$$

qui signifie exactement que la valeur prise par $\cos$ en θ est celle que prend $\sin$ un peu plus loin, en $\theta + \frac{\pi}{2}$: la courbe de $\cos$ s'obtient donc en décalant celle de $\sin$ de $\frac{\pi}{2}$ vers la gauche.



Remarque

On retrouve la π -périodicité de $\tan$ (le motif se répète tous les π), sa stricte croissance sur chaque intervalle $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, et les asymptotes verticales en chaque $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (droites pointillées).

2.7 Formules d'addition et de duplication

Formules d'addition

Pour tous réels a, b :

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b, & \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b, & \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b.\end{aligned}$$

Démonstration (à l'aide du produit scalaire). Soient $M(a)$ et $M(b)$ les points du cercle trigonométrique associés à a et b : $\overrightarrow{OM(a)}$ et $\overrightarrow{OM(b)}$ sont des vecteurs **unitaires**, faisant entre eux un angle $a - b$. D'une part, par définition géométrique du produit scalaire :

$$\overrightarrow{OM(a)} \cdot \overrightarrow{OM(b)} = \|\overrightarrow{OM(a)}\| \|\overrightarrow{OM(b)}\| \cos(a - b) = \cos(a - b).$$

D'autre part, en coordonnées, $\overrightarrow{OM(a)} = (\cos a, \sin a)$ et $\overrightarrow{OM(b)} = (\cos b, \sin b)$, donc

$$\overrightarrow{OM(a)} \cdot \overrightarrow{OM(b)} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

D'où $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En remplaçant b par $-b$ (et en utilisant $\cos(-b) = \cos b$, $\sin(-b) = -\sin b$), on obtient $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Pour $\sin(a + b)$, on utilise la formule $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$ (angles associés, 2.4) :

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

On obtient $\sin(a - b)$ en remplaçant b par $-b$. ■

Formules de duplication

Pour tout réel x :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

Remarque

Ces formules s'obtiennent en prenant $a = b = x$ dans les formules d'addition, puis en utilisant $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour les deux variantes de $\cos(2x)$.

2.8 Congruences et équations trigonométriques**Définition**

Soit $\theta > 0$ un réel. On dit que deux réels x et y sont **congrus modulo θ** , ce que l'on note

$$x \equiv y [\theta],$$

s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\theta$ (autrement dit, si $x - y$ est un multiple entier de θ).

Remarque

Par définition même du point $M(\theta)$ (partie 2.1), deux réels x et y donnent le **même point** sur le cercle trigonométrique, $M(x) = M(y)$, si et seulement si $x \equiv y [2\pi]$ (un tour complet du cercle correspond à un déplacement de 2π).

Résolution des équations trigonométriques

Pour tous réels a, b :

$$\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv -b [2\pi],$$

$$\sin(a) = \sin(b) \iff a \equiv b [2\pi] \text{ ou } a \equiv \pi - b [2\pi].$$

De plus, pour $a, b \in D_{\tan}$:

$$\tan(a) = \tan(b) \iff a \equiv b [\pi].$$

Justification graphique. $\cos(a) = \cos(b)$ signifie que $M(a)$ et $M(b)$ ont la même abscisse : d'après les symétries du cercle (partie 2.4), cela signifie que $M(a) = M(b)$ (soit $a \equiv b [2\pi]$) ou que $M(a)$ est le symétrique de $M(b)$ par rapport à l'axe (Ox) , c'est-à-dire $M(a) = M(-b)$ (soit $a \equiv -b [2\pi]$). Le raisonnement est analogue pour $\sin$ (symétrie par rapport à (Oy) , via $M(\pi - b)$). Pour $\tan$, la π -périodicité et la stricte monotonie sur chaque intervalle $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ donnent directement l'équivalence.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(3x) = \sin(x)$.

D'après le théorème : $3x \equiv x [2\pi]$ ou $3x \equiv \pi - x [2\pi]$, soit :

$$2x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } 4x \equiv \pi [2\pi],$$

$$x \equiv 0 [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right].$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Remarque

Cette méthode par congruences est particulièrement efficace pour les équations du type $\cos(\alpha x + \beta) = \cos(\gamma x + \delta)$ (ou avec $\sin$, $\tan$), où une résolution « à la main » via le cercle serait malaisée.

3 Fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions $\sin$, $\cos$ et $\tan$ sont périodiques : elles ne sont donc **pas** des bijections sur $\mathbb{R}$ (chaque valeur est atteinte une infinité de fois). Pour leur appliquer la théorie de la partie 1, on les **restreint** à un intervalle sur lequel elles deviennent des bijections.

3.1 La fonction arcsinus

Théorème

La fonction $\sin$ est dérivable, avec $\sin' = \cos$. Sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos \theta \geq 0$: $\sin$ est donc continue et strictement croissante sur I . D'après le théorème de la bijection, $\sin$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

Définition

On appelle **arcsinus**, notée $\arcsin$, la bijection réciproque de cette restriction :

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin x) = x \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin \theta) = \theta.$$

Attention

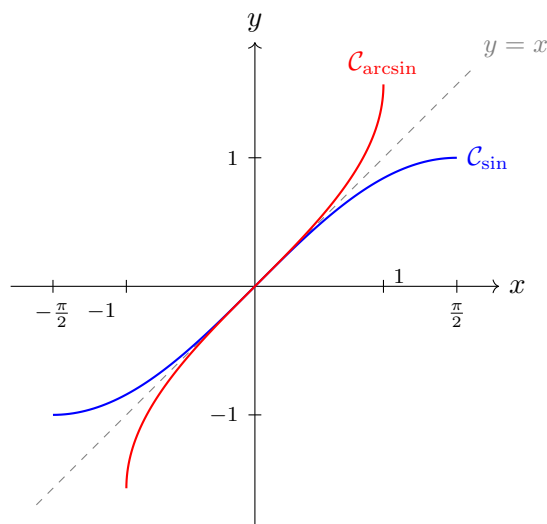
La seconde égalité est **fausse** si $\theta \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$! Par exemple :

$$\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi.$$

Avant de « simplifier » $\arcsin(\sin \theta)$, il faut **toujours** vérifier que θ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (sinon, il faut d'abord ramener θ dans cet intervalle à l'aide des formules de 2.4).

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

(et $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$, car $\arcsin$ est **impair**, comme $\sin$.)



Dérivée de arcsin

arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ (mais **pas** en ± 1), et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Soit $x \in] -1, 1[$ et $\theta = \arcsin(x) \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (intervalle **ouvert**, car $x \neq \pm 1$). On a $\sin'(\theta) = \cos \theta$, et $\cos \theta > 0$ **strictement** sur cet intervalle ouvert : d'après le théorème de la partie 1.6, arcsin est donc dérivable en x , avec

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos \theta}.$$

Comme $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ et $\cos \theta > 0$, on a $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}$, d'où le résultat. En $x = \pm 1$, on a $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, donc $\cos \theta = 0$: d'après le même théorème, arcsin **n'est pas dérivable** en ± 1 (tangente verticale, comme pour la racine cubique en 1.6). ■

3.2 La fonction arccosinus

Théorème

$\cos' = -\sin \leq 0$ sur $[0, \pi]$: cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, donc réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition

On appelle **arccosinus**, notée arccos, la bijection réciproque de cette restriction :

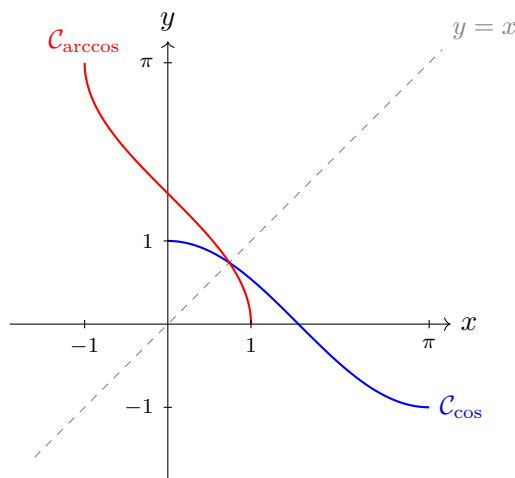
$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi].$$

De même que précédemment :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos x) = x \quad \text{et} \quad \forall \theta \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos \theta) = \theta.$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Pour $x < 0$, on utilise $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ (conséquence de $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, vue en 2.4) — $\arccos$ n'est donc **pas** une fonction impaire.



Dérivée de arccos

$\arccos$ est dérivable sur $] -1, 1[$ (mais pas en ± 1), et

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Soit $x \in] -1, 1[$ et $\theta = \arccos(x) \in]0, \pi[$. On a $\cos'(\theta) = -\sin \theta$, et $\sin \theta > 0$ strictement sur $]0, \pi[$, donc $\cos'(\theta) \neq 0$: $\arccos$ est dérivable en x , avec $\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin \theta} = \frac{-1}{\sin \theta}$. Comme $\sin \theta > 0$, $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}$, d'où le résultat. ■

Remarque

On remarque que $\arcsin'(x) + \arccos'(x) = 0$ pour tout $x \in] -1, 1[$: c'est cohérent avec la propriété suivante, où $\arcsin(x) + \arccos(x)$ est **constant**.

3.3 Relation entre arcsinus et arccosinus

Théorème

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. Soit $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de sorte que $\sin \theta = x$. D'après les formules des angles associés (2.4), $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = x$. De plus, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ entraîne $\frac{\pi}{2} - \theta \in [0, \pi]$. Par **unicité** dans la définition de $\arccos$ (bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$), on en déduit :

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x). \quad \blacksquare$$

3.4 La fonction arctangente

Dérivée de $\tan$

Pour θ tel que $\cos \theta \neq 0$:

$$\tan'(\theta) = \frac{\cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot (-\sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta.$$

En particulier, $\tan'(\theta) \geq 1 > 0$: $\tan$ est **strictement croissante** sur chaque intervalle de son domaine.

Théorème

$\tan$ est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec $\lim_{\theta \rightarrow -\pi/2^+} \tan \theta = -\infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \tan \theta = +\infty$ (car $\cos \theta \rightarrow 0^+$). D'après le théorème de la bijection, $\tan$ réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition

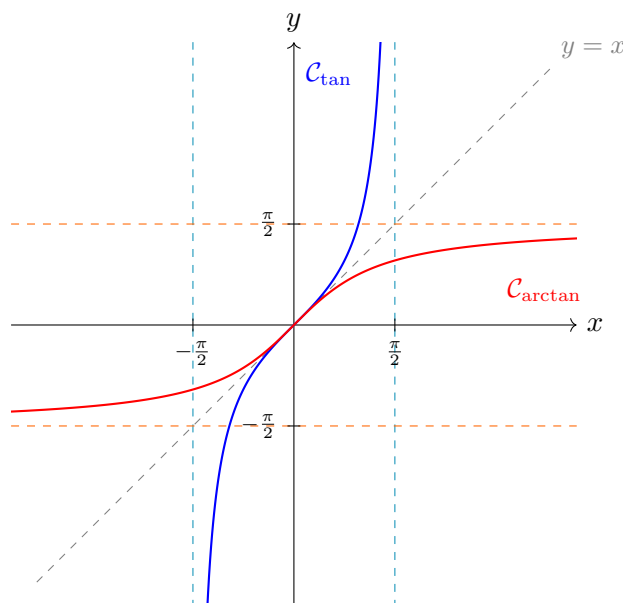
On appelle **arctangente**, notée $\arctan$, la bijection réciproque de cette restriction :

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \quad \arctan(\tan \theta) = \theta.$$

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

(et $\arctan(-x) = -\arctan(x)$, car $\arctan$ est **impaire**, comme $\tan$.)



Remarque

On retrouve ici le même principe qu'en 1.6 : les asymptotes **verticales** de $\tan$ (en $\pm\frac{\pi}{2}$) deviennent, par symétrie par rapport à $y = x$, les asymptotes **horizontales** de $\arctan$ (en $y = \pm\frac{\pi}{2}$).

Dérivée de $\arctan$

$\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ **tout entier**, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta = \arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a $\tan'(\theta) = 1 + \tan^2 \theta = 1 + x^2 \neq 0$ (et ceci pour **tout** x) : d'après le théorème de la partie 1.6, $\arctan$ est dérivable en x , avec

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\theta)} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \blacksquare$$

Remarque

Contrairement à $\arcsin$ et $\arccos$, qui ne sont pas dérivables aux bornes de leur domaine, $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est exactement cohérent avec le critère de la partie 1.6 : f^{-1} n'est pas dérivable là où $f' = 0$, or ici $\tan'(\theta) = 1 + \tan^2 \theta$ n'est **jamais nul**.

3.5 Récapitulatif

	$\arcsin$	$\arccos$	$\arctan$
Domaine	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$
Image	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[0, \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
Dérivable sur	$] -1, 1[$	$] -1, 1[$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Parité	impaire	(aucune)	impaire

4 Logarithme, exponentielle et fonctions puissances

On admet dans cette partie le résultat suivant, qui sera démontré plus tard dans l'année (chapitre sur l'intégration) :

Existence de primitives (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I . De plus, si F et G sont deux primitives d'une même fonction sur I , alors $F - G$ est **constante** sur I . En particulier, pour tout $a \in I$ et tout $k \in \mathbb{R}$, il existe une **unique** primitive de f sur I qui

vaut k en a .

4.1 Le logarithme népérien, défini comme primitive

Définition

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On appelle **logarithme népérien**, noté $\ln$, l'unique primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Ainsi, $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et :

$$\ln(1) = 0, \quad \forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Remarque

Puisque $\ln$ est la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, on a aussi $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ pour $x > 0$: c'est une aire (algébrique) sous la courbe de $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Comme $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0, +\infty[$, $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$.

Relation fonctionnelle

Pour tous réels $a, b > 0$:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration. Fixons $b > 0$ et posons, pour $x > 0$, $g(x) = \ln(xb) - \ln(x) - \ln(b)$. Alors g est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$g'(x) = \frac{b}{xb} - \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Donc g est **constante** sur $]0, +\infty[$ (une fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle est constante). Or $g(1) = \ln(b) - \ln(1) - \ln(b) = -\ln(1) = 0$. Donc g est nulle, ce qui donne le résultat. ■

Propriétés calculatoires du logarithme

Pour tous réels $x, y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$;
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$;
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$.

Remarque

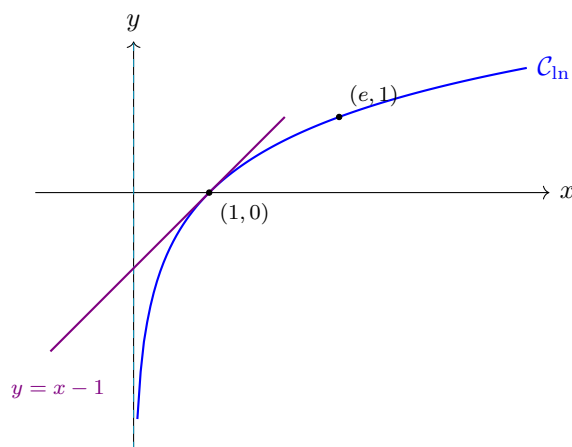
Toutes ces formules se déduisent de la seule relation fonctionnelle $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$: par exemple, $\ln(1/x) = -\ln x$ s'obtient en écrivant $0 = \ln(1) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Limites. Comme $\ln$ est strictement croissante et $1 < 2$, on a $\ln(2) > \ln(1) = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, la relation fonctionnelle donne $\ln(2^n) = n \ln(2)$, qui tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ (car $\ln 2 > 0$) : par croissance de $\ln$, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

De même, $\ln(2^{-n}) = -n \ln(2) \rightarrow -\infty$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

**Remarque**

La courbe admet une **asymptote verticale** d'équation $x = 0$ (puisque $\ln(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$), et $\ln$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, mais « très lentement » (ceci sera précisé plus tard dans l'année à l'aide des croissances comparées).

4.2 La fonction exponentielle, définie comme réciproque**Théorème**

$\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. D'après le théorème de la bijection (partie 1.4), $\ln$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle **exponentielle**, notée $\exp$, la bijection réciproque de $\ln$:

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[.$$

Autrement dit, pour $y \in \mathbb{R}$, $\exp(y)$ est l'unique réel $x > 0$ tel que $\ln(x) = y$.

Remarque

Exactement comme pour $x^3 + x$ en partie 1.4 : on ne dispose d'**aucune formule algébrique** permettant de résoudre $\ln(x) = y$ à la main. C'est précisément **parce qu'on ne sait pas la résoudre** que l'on donne un nom, $\exp$, à la fonction réciproque ainsi définie.

On a $\exp(0) = 1$ (car $\ln(1) = 0$). On note $e := \exp(1)$, c'est-à-dire l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$ (on démontre que $e \approx 2,71828$).

Dérivée de l'exponentielle

$\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ **tout entier**, et

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exp'(y) = \exp(y).$$

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x = \exp(y) > 0$. On a $\ln'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ (car $x > 0$) : d'après le théorème de la partie 1.6, $\exp$ est dérivable en y , avec

$$\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(x)} = \frac{1}{1/x} = x = \exp(y). \quad \blacksquare$$

Relation fonctionnelle

Pour tous réels a, b :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b).$$

Démonstration. Posons $x = \exp(a) > 0$ et $y = \exp(b) > 0$. Alors $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) = a + b$ (relation fonctionnelle de $\ln$, et $\ln \circ \exp = \text{id}$). Comme $\exp \circ \ln = \text{id}$ sur $]0, +\infty[$ et $xy > 0$, on a $xy = \exp(\ln(xy)) = \exp(a + b)$, soit $\exp(a) \exp(b) = \exp(a + b)$. $\blacksquare$

Propriétés calculatoires de l'exponentielle

Pour tous réels a, b et tout $n \in \mathbb{Z}$:

- $\exp(0) = 1$;
- $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$;
- $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$;
- $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$;
- $\exp(na) = \exp(a)^n$;
- $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$.

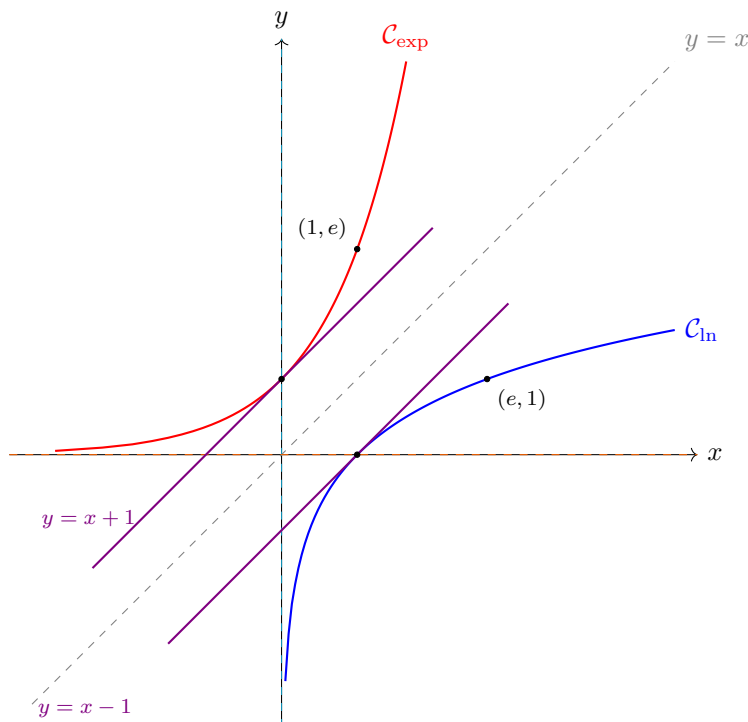
Remarque

Comme pour $\ln$, toutes ces formules se déduisent de la seule relation fonctionnelle $\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$: par exemple, $\exp(-a) = 1/\exp(a)$ s'obtient en écrivant $1 = \exp(0) = \exp(a + (-a)) = \exp(a) \exp(-a)$.

Notation e^x

Par récurrence à partir de la relation fonctionnelle, on obtient $\exp(n) = \exp(1)^n = e^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $\exp$ prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier la notion de puissance de e : on convient donc de noter, pour **tout** réel x ,

$$e^x := \exp(x).$$

**Remarque**

Par symétrie par rapport à $y = x$: l'asymptote **verticale** $x = 0$ de $C_{\ln}$ devient une asymptote **horizontale** $y = 0$ pour $C_{\exp}$ (en $-\infty$), et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$. On retrouve le même principe qu'en 1.6 et pour arctan.

4.3 Fonctions puissances**Définition**

Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x)) = e^{\alpha \ln x}.$$

Remarque

Cette définition prolonge la notion usuelle de puissance : pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, la relation fonctionnelle de $\exp$ donne $\exp(n \ln x) = \exp(\ln x)^n = x^n$, ce qui coïncide bien avec la puissance n -ième usuelle.

Règles de calcul sur les puissances

Pour tous réels $x, y > 0$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (dès que les expressions ont un sens) :

- $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
- $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$, et en particulier $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$;
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
- $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$;
- $\frac{x^\alpha}{y^\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$.

Remarque

Toutes ces règles se déduisent immédiatement de la définition $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ et des propriétés de $\ln$ et $\exp$ déjà établies. Par exemple :

$$x^\alpha x^\beta = \exp(\alpha \ln x) \exp(\beta \ln x) = \exp((\alpha + \beta) \ln x) = x^{\alpha+\beta}.$$

Limite de x^α en 0^+

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ 1 & \text{si } \alpha = 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Démonstration. On écrit $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\ln x \rightarrow -\infty$. Si $\alpha > 0$, alors $\alpha \ln x \rightarrow -\infty$, donc $\exp(\alpha \ln x) \rightarrow 0$. Si $\alpha < 0$, alors $\alpha \ln x \rightarrow +\infty$, donc $\exp(\alpha \ln x) \rightarrow +\infty$. Si $\alpha = 0$, $x^0 = \exp(0) = 1$ pour tout $x > 0$. ■

Remarque

Lorsque $\alpha > 0$, on peut donc **prolonger par continuité** $x \mapsto x^\alpha$ en 0, en posant $0^\alpha := 0$: la fonction ainsi prolongée est continue sur $[0, +\infty[$ tout entier.

Dérivée des fonctions puissances

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall x > 0, \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ est la composée de $x \mapsto \alpha \ln x$ (dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\frac{\alpha}{x}$) et de $\exp$ (dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\exp$). D'après la formule de dérivation d'une fonction composée (cf. le tout début du cours !) :

$$(x^\alpha)' = \frac{\alpha}{x} \times \exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}. \quad \blacksquare$$

Remarque

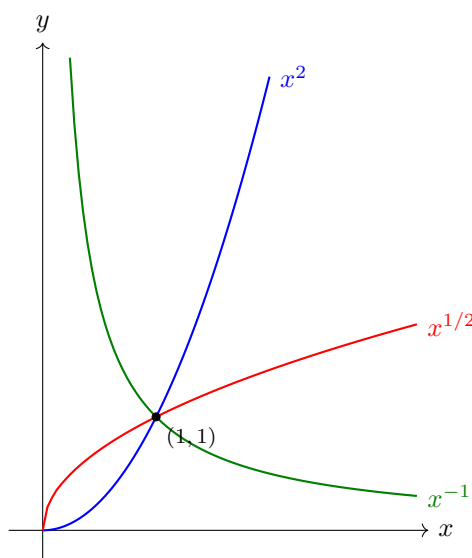
Selon le signe de α , $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$, et constante (égale à 1) si $\alpha = 0$. Dans tous les cas, $1^\alpha = \exp(\alpha \ln 1) = \exp(0) = 1$.

Dérivabilité en 0 (pour $\alpha > 0$). On a vu que, pour $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ se prolonge par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$. Le taux d'accroissement en 0 de cette fonction prolongée vaut, pour $x > 0$:

$$\frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$$

D'après le théorème de limite ci-dessus (appliqué à l'exposant $\alpha - 1$) :

- si $\alpha > 1$: $x^{\alpha-1} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ (car $\alpha - 1 > 0$) : la fonction est **dérivable** en 0, de nombre dérivé 0 (tangente horizontale) ;
- si $\alpha = 1$: $x^1 = x$ est bien sûr dérivable en 0, de dérivée 1 ;
- si $0 < \alpha < 1$: $x^{\alpha-1} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 0^+$ (car $\alpha - 1 < 0$) : la fonction **n'est pas dérivable** en 0 (tangente verticale) — c'est le cas par exemple de $\sqrt{x}$ (avec $\alpha = \frac{1}{2}$).

**Remarque**

Le point $(1, 1)$ est commun à toutes les courbes $x \mapsto x^\alpha$, puisque $1^\alpha = 1$ pour tout α .

4.4 Racines n -ièmes d'un réel positif ou nul**Théorème**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $0^n = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Définition

Pour $a \geq 0$, on appelle **racine n -ième** de a , notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$, l'unique réel $x \geq 0$ tel que $x^n = a$.

Remarque

Pour $a > 0$, cette définition coïncide avec $a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)$ vue plus haut : en effet $(a^{1/n})^n = \exp\left(n \cdot \frac{1}{n} \ln a\right) = \exp(\ln a) = a$. Pour $a = 0$, on pose $\sqrt[n]{0} := 0$, ce qui est cohérent avec le prolongement par continuité en 0 vu ci-dessus (avec $\alpha = \frac{1}{n} > 0$).

4.5 Limites de référence, obtenues grâce à la dérivée

Méthode. Si f est dérivable en a , alors, par **définition** du nombre dérivé :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

De nombreuses limites, en apparence des formes indéterminées « $\frac{0}{0}$ », sont en réalité des taux d'accroissement déguisés : les reconnaître permet de les calculer instantanément, sans aucun calcul supplémentaire.

Limites de référence

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 0, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Démonstration. Chacune de ces limites est le taux d'accroissement d'une fonction usuelle en un point où l'on connaît sa dérivée :

- $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \rightarrow \sin'(0) = \cos(0) = 1$;
- $\frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \rightarrow \cos'(0) = -\sin(0) = 0$;
- $\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \rightarrow \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$;
- $\frac{e^x - e^0}{x - 0} \rightarrow \exp'(0) = \exp(0) = 1$;
- $\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x - 0} \rightarrow \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$;
- $\frac{(1+x)^\alpha - 1^\alpha}{x - 0} \rightarrow (t \mapsto t^\alpha)'(1) = \alpha \cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$. ■

Remarque

Cette méthode sera reprise et généralisée en fin d'année avec les **développements limités**, qui donneront un renseignement bien plus précis que la seule limite (un ordre supplémentaire dans l'approximation).

4.6 Croissances comparées

On compare ici, en $+\infty$, la « vitesse » avec laquelle $\ln$, les puissances de x , et $\exp$ tendent vers l'infini.

Lemme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité classique $\ln t \leq t - 1$ pour tout $t > 0$ (car la fonction $t \mapsto t - 1 - \ln t$ a pour dérivée $1 - \frac{1}{t}$, s'annule en $t = 1$ où elle admet un minimum de valeur 0). Pour $x > 0$, en appliquant ceci à $t = \sqrt{x}$:

$$\ln(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x} - 1 < \sqrt{x}, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \ln(x) < \sqrt{x}, \quad \text{soit} \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Comme $\frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement donne le résultat. ■

Croissances comparées (admis dans le cas général)

Pour tout $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Remarque

On retient la hiérarchie mnémotechnique : en $+\infty$, **l'exponentielle l'emporte toujours sur les puissances de x , qui l'emportent toujours sur le logarithme**. Le lemme ci-dessus est exactement le cas $\alpha = 1$ de la première limite ; les autres cas, ainsi que les deux autres limites, s'en déduisent par des changements de variable analogues à ceux pratiqués en 4.3 (limite de x^α en 0).