

Rappels et compléments de calcul et d'analyse

PCSI

1 Le second degré

1.1 Forme canonique

Tout trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) peut s'écrire sous une forme dite **canonique** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

qui met directement en évidence le **sommet** (α, β) de la parabole représentative. Voici trois méthodes pour l'obtenir, illustrées sur un même exemple.

Méthode 1 : factorisation par le coefficient dominant

Méthode

On factorise par a les termes en x^2 et en x **uniquement** (pas le terme constant), on fait apparaître le début d'un carré $(x + u)^2 = x^2 + 2ux + u^2$ en identifiant $2u$ au coefficient de x à l'intérieur de la parenthèse, puis on **redéveloppe partiellement** pour compenser le terme u^2 ajouté en trop.

Exemple

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

On factorise par 2 les deux premiers termes :

$$f(x) = 2(x^2 - 6x) + 5.$$

On reconnaît le début du carré $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ (ici $2u = -6$, donc $u = -3$) : on le fait apparaître en ajoutant et en retranchant 9 à l'intérieur de la parenthèse :

$$f(x) = 2[(x - 3)^2 - 9] + 5.$$

On redéveloppe partiellement (on distribue le 2 sur le -9 uniquement) :

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 18 + 5 = 2(x - 3)^2 - 13.$$

Méthode 2 : identification des coefficients

Méthode

On développe la forme canonique attendue $a(x - \alpha)^2 + \beta$:

$$a(x - \alpha)^2 + \beta = ax^2 - 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta,$$

puis on **identifie** les coefficients de x^2 , de x et le terme constant avec ceux de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Le coefficient de x^2 coïncide automatiquement ; l'identification du coefficient de x donne α , puis celle du terme constant donne β .

Exemple

Reprenons $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$. On cherche α, β tels que $f(x) = 2(x - \alpha)^2 + \beta$.
En développant : $2(x - \alpha)^2 + \beta = 2x^2 - 4\alpha x + 2\alpha^2 + \beta$. Par identification avec $2x^2 - 12x + 5$:

- coefficient de x : $-4\alpha = -12$, donc $\alpha = 3$;
- terme constant : $2\alpha^2 + \beta = 5$, soit $18 + \beta = 5$, donc $\beta = -13$.

On retrouve bien $f(x) = 2(x - 3)^2 - 13$.

Lecture directe des variations depuis la forme canonique**Méthode**

Une fois $f(x)$ écrite sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$, ses variations se lisent **directement**, sans dérivation, à partir de celles de la fonction carré $u \mapsto u^2$, décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$:

- par translation, $x \mapsto (x - \alpha)^2$ est décroissante sur $] -\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$;
- multiplier par a **conserve** le sens de variation si $a > 0$, et l'**inverse** si $a < 0$;
- ajouter β ne change pas le sens de variation (translation verticale).

De plus $(x - \alpha)^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x = \alpha$: f admet donc en $x = \alpha$ un **minimum** égal à β si $a > 0$, un **maximum** égal à β si $a < 0$. Les trois exemples suivants illustrent cette lecture directe.

Exemple

Soit $f(x) = 2(x + 3)^2 + 4$, soit $\alpha = -3$, $\beta = 4$, $a = 2 > 0$. Comme $a > 0$, f a le même sens de variation que $x \mapsto (x + 3)^2$: décroissante sur $] -\infty, -3]$, croissante sur $[-3, +\infty[$, avec un **minimum** en $x = -3$ valant $f(-3) = 4$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

Exemple

Soit $f(x) = -(x-5)^2 - 2$, soit $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $a = -1 < 0$. Comme $a < 0$, f a le sens de variation **opposé** à celui de $x \mapsto (x-5)^2$: croissante sur $] -\infty, 5]$, décroissante sur $[5, +\infty[$, avec un **maximum** en $x = 5$ valant $f(5) = -2$.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$

Exemple

Soit $f(x) = -x^2 + 7$, soit $\alpha = 0$, $\beta = 7$, $a = -1 < 0$. Comme $a < 0$, f a le sens de variation **opposé** à celui de $x \mapsto x^2$: croissante sur $] -\infty, 0]$, décroissante sur $[0, +\infty[$, avec un **maximum** en $x = 0$ valant $f(0) = 7$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	7	$-\infty$

Méthode 3 : retrouver le sommet à l'aide de la dérivée**Méthode**

La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 2ax + b$, qui s'annule en

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

L'étude du signe de f' (qui dépend du signe de a) donne les variations de f : x_0 est l'**abscisse du sommet** de la parabole, et $f(x_0)$ en est l'**ordonnée**. On retrouve ainsi $\alpha = x_0$ et $\beta = f(x_0)$.

Remarque

Cette méthode est surtout utile lorsque f est donnée **directement** sous la forme $ax^2 + bx + c$, sans être déjà passé par la forme canonique : elle permet de retrouver immédiatement l'abscisse et l'ordonnée du sommet, sans repasser par les méthodes 1 ou 2.

Application : minimisation d'une intégrale dépendant de deux paramètres

Déterminer le minimum, sur $\mathbb{R}^2$, de $F(a, b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$

Étape 1 : calcul de $F(a, b)$. En développant le carré :

$$(x^2 - ax - b)^2 = x^4 - 2ax^3 + (a^2 - 2b)x^2 + 2abx + b^2.$$

On intègre terme à terme sur $[0, 1]$, en utilisant $\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$, $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$:

$$F(a, b) = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{a^2 - 2b}{3} + ab + b^2.$$

En regroupant les termes, on observe que $F(a, b)$ est, à b fixé, un trinôme du **second degré en la variable a** :

$$F(a, b) = \frac{1}{3}a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)a + \left(b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{5}\right).$$

Étape 2 : forme canonique par rapport à a . On factorise par le coefficient dominant $\frac{1}{3}$ et l'on complète le carré (Méthode 1) :

$$F(a, b) = \frac{1}{3} \left(a + \frac{3}{2} \left(b - \frac{1}{2} \right) \right)^2 + \left[\left(b^2 - \frac{2}{3}b + \frac{1}{5} \right) - \frac{3}{4} \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 \right].$$

Le crochet ne dépend plus que de b : notons-le $\beta(b)$. En développant et en simplifiant :

$$\beta(b) = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{12}b + \frac{1}{80}.$$

Étape 3 : $\beta(b)$ est à son tour du second degré (en b), on lui applique la même méthode. On factorise par $\frac{1}{4}$ et l'on complète le carré :

$$\beta(b) = \frac{1}{4} \left(b + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{180}.$$

Conclusion. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a donc

$$F(a, b) = \frac{1}{3} \left(a + \frac{3}{2} \left(b - \frac{1}{2} \right) \right)^2 + \frac{1}{4} \left(b + \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{180},$$

somme de deux carrés et d'une constante, d'où $F(a, b) \geq \frac{1}{180}$. L'égalité a lieu si et seulement si les deux carrés sont nuls, c'est-à-dire

$$b = -\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad a = -\frac{3}{2} \left(b - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Le minimum de F sur $\mathbb{R}^2$ vaut donc $\frac{1}{180}$, atteint uniquement en $(a, b) = \left(1, -\frac{1}{6}\right)$.

Remarque

Le principe — mettre successivement sous forme canonique par rapport à chaque variable — permet ainsi de minimiser une expression du second degré en **deux** variables sans recourir au calcul différentiel (dérivées partielles) : on retrouvera cette méthode chaque fois qu'une telle situation se présente.

1.2 Équation et inéquation du second degré

On cherche maintenant à résoudre l'équation $f(x) = 0$, où $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Méthode

On factorise entièrement par a (y compris le terme constant, cette fois), puis on fait apparaître un carré comme en Méthode 1 :

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right].$$

Définition

Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$. Comme

$$-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2},$$

le trinôme reste, avec cette notation, **entièrement factorisé par a** :

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

L'équation $f(x) = 0$ s'écrit alors

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0,$$

et, comme $a \neq 0$, elle équivaut à

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Le membre de gauche étant un carré (donc positif ou nul), le nombre de solutions dépend entièrement du **signe de Δ** .

Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

- Si $\Delta < 0$: l'équation n'a **aucune solution réelle** (un carré ne peut être négatif).
- Si $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$, donc $x + \frac{b}{2a} = 0$: l'équation a une **unique solution** (dite racine double) :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$: puisque $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, l'égalité $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ équivaut à

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

d'où **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Cas $\Delta > 0$

Réolvons $x^2 - 5x + 6 = 0$. Ici $a = 1, b = -5, c = 6$, donc $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Les solutions sont

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3.$$

Cas $\Delta = 0$

Réolvons $x^2 - 4x + 4 = 0$. Ici $a = 1, b = -4, c = 4$, donc $\Delta = 16 - 16 = 0$. L'unique solution est

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2.$$

(On vérifie que $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.)

Cas $\Delta < 0$

Réolvons $x^2 + x + 1 = 0$. Ici $a = 1, b = 1, c = 1$, donc $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$: l'équation n'admet **aucune solution réelle**.

On en déduit au passage une factorisation de f , ainsi que des relations très utiles entre ses racines et ses coefficients. Lorsque $\Delta \geq 0$, le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet une ou deux racines x_1, x_2 (confondues si $\Delta = 0$), et se factorise alors sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, comme le montre le calcul suivant dans le cas $\Delta > 0$.

Calcul explicite de la factorisation, dans le cas $\Delta > 0$

On repart de la forme obtenue plus haut, $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$. Comme $\Delta > 0$,

on peut écrire $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$: le crochet est alors une **différence de deux carrés**, que

l'on factorise à l'aide de l'identité $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, avec $u = x + \frac{b}{2a}$ et $v = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On reconnaît, dans chaque facteur, les racines $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ trouvées

précédemment :

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = x - x_2, \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = x - x_1.$$

Le crochet vaut donc $(x - x_2)(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2)$, d'où, en multipliant par a :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (\text{lorsque } \Delta > 0).$$

Remarque

Ce résultat reste vrai lorsque $\Delta = 0$ (avec $x_1 = x_2 = x_0$) : on a alors directement $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$, sans différence de carrés à effectuer.

Méthode

On développe $a(x - x_1)(x - x_2)$ et on **identifie** avec $ax^2 + bx + c$:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2.$$

Par identification des coefficients de x et des termes constants avec $ax^2 + bx + c$:

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \text{et} \quad ax_1x_2 = c,$$

d'où les relations annoncées.

Somme et produit des racines

Si x_1, x_2 sont les racines (éventuellement confondues) de $ax^2 + bx + c$, alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque

Ces relations sont très utiles pour **vérifier rapidement** un calcul de racines (sans recalculer Δ), mais surtout pour **trouver directement la seconde racine** dès qu'une racine dite « évidente » (souvent 1, -1, ou un petit entier) est repérée par tâtonnement : on évite ainsi tout calcul de discriminant.

Racine évidente $x_1 = 1$

Soit $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$. On remarque que $f(1) = 2 - 7 + 5 = 0$: $x_1 = 1$ est une racine évidente.

Le produit des racines vaut $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$, donc, puisque $x_1 = 1$:

$$x_2 = \frac{5}{2}.$$

Vérification par la somme : $x_1 + x_2$ doit valoir $-\frac{b}{a} = \frac{7}{2}$; or $1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$. ✓

On en déduit la factorisation :

$$2x^2 - 7x + 5 = 2(x - 1) \left(x - \frac{5}{2} \right) = (x - 1)(2x - 5).$$

Racine évidente $x_1 = -1$

Soit $f(x) = 7x^2 + 9x + 2$. On remarque que $f(-1) = 7 - 9 + 2 = 0$: $x_1 = -1$ est une racine évidente.

Le produit des racines vaut $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{7}$, donc, puisque $x_1 = -1$:

$$-x_2 = \frac{2}{7}, \quad \text{soit} \quad x_2 = -\frac{2}{7}.$$

Vérification par la somme : $x_1 + x_2$ doit valoir $-\frac{b}{a} = -\frac{9}{7}$; or $-1 - \frac{2}{7} = -\frac{9}{7}$. ✓

On en déduit la factorisation :

$$7x^2 + 9x + 2 = 7(x + 1) \left(x + \frac{2}{7} \right) = (x + 1)(7x + 2).$$

On termine cette section par le signe d'un trinôme, qui permet de résoudre les **inéquations** du second degré.

Signe du trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est du **signe de a** pour tout réel x .
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du **signe de a** pour tout $x \neq x_0$, et $f(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$: $f(x)$ est du **signe de a** à l'extérieur des racines, et du **signe opposé à a** entre les racines. Autrement dit, pour $x_1 < x_2$:

$$f(x) \text{ est du signe de } a \text{ sur }]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[,$$

$$f(x) \text{ est du signe de } -a \text{ sur }]x_1, x_2[.$$

Remarque

Ce résultat découle directement de la factorisation $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (cas $\Delta > 0$) : le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles, d'où le signe annoncé une fois multiplié par a . Moyen mnémotechnique : le trinôme est du « signe de a sauf entre les racines ».

Résoudre $x^2 - 7x + 12 > 0$

Le trinôme $f(x) = x^2 - 7x + 12$ a pour discriminant $\Delta = 49 - 48 = 1 > 0$, et pour racines

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Ici $a = 1 > 0$: $f(x)$ est donc positif à l'extérieur des racines, négatif entre elles.

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On lit sur le tableau de signes que $f(x) > 0$ sur $] - \infty, 3[\cup] 4, +\infty[$. L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} =] - \infty, 3[\cup] 4, +\infty[.$$

Résoudre $x^2 - 6x + 12 < 0$

Le trinôme $f(x) = x^2 - 6x + 12$ a pour discriminant $\Delta = 36 - 48 = -12 < 0$.

D'après le théorème, comme $\Delta < 0$, $f(x)$ est du **signe de a** pour **tout** réel x ; ici $a = 1 > 0$, donc $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En particulier, $f(x)$ n'est **jamais** strictement négatif : l'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Inéquations avec quotient

Attention

Pour résoudre une inéquation faisant intervenir un quotient, il est **interdit** de multiplier les deux membres par une expression dont on ne connaît pas le signe (par exemple par x , ou par $x + 1$) : on ne sait pas a priori si cela conserve ou inverse le sens de l'inégalité. La bonne méthode consiste à tout regrouper d'un seul côté de l'inégalité pour se ramener à la forme $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$, puis à étudier le signe de ce quotient à l'aide d'un tableau de signes.

Méthode

1. Déterminer le **domaine** (exclure les valeurs qui annulent un dénominateur).
2. Regrouper tous les termes d'un même côté, réduire au même dénominateur et **factoriser** numérateur et dénominateur.
3. Dresser un **tableau de signes** de chacun des facteurs, puis du quotient, en marquant d'un double trait $\parallel$ la valeur interdite.

Résoudre $x \geq \frac{1}{x}$

Le domaine est $\mathbb{R}^*$. On regroupe tout à gauche :

$$x \geq \frac{1}{x} \iff x - \frac{1}{x} \geq 0 \iff \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \iff \frac{(x - 1)(x + 1)}{x} \geq 0.$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x - 1$	$-$		$-$	$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	$+$		$+$
Signe	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

La dernière ligne (produit des deux premières, divisé par la troisième) donne le signe du quotient $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$, le symbole en double trait signalant la valeur interdite $x = 0$.

Le quotient est positif ou nul sur $[-1, 0[\cup [1, +\infty[$ (en incluant -1 et 1 , qui l'annulent, et en excluant 0 , qui n'appartient pas au domaine). L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = [-1, 0[\cup [1, +\infty[.$$

Résoudre $x - \frac{1}{2} \geq \frac{x}{x+1}$

Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On regroupe tout à gauche et on réduit au même dénominateur $2(x+1)$:

$$x - \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} = \frac{2x(x+1) - (x+1) - 2x}{2(x+1)} = \frac{2x^2 - x - 1}{2(x+1)} = \frac{(x-1)(2x+1)}{2(x+1)}.$$

L'inéquation équivaut donc à $\frac{(x-1)(2x+1)}{2(x+1)} \geq 0$, c'est-à-dire (le facteur constant 2 au dénominateur étant strictement positif, il ne change pas le signe) à $\frac{(x-1)(2x+1)}{x+1} \geq 0$.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	
Signe	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

La dernière ligne donne le signe du quotient $\frac{(x-1)(2x+1)}{x+1}$, le symbole en double trait signalant la valeur interdite $x = -1$.

Le quotient est positif ou nul sur $] -1, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$ (en excluant -1 , hors domaine, et en incluant $-\frac{1}{2}$ et 1 , qui l'annulent). L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left] -1, -\frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[.$$

1.3 Changements de variable

Certaines équations de degré 4, sans être elles-mêmes du second degré, se ramènent à une équation du second degré grâce à un **changement de variable** bien choisi. On en présente deux types classiques.

Équations bicarrées

Définition

Une équation **bicarrée** est une équation de la forme

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

c'est-à-dire ne faisant intervenir que des puissances paires de x .

Méthode

On pose $t = x^2$ (donc $t \geq 0$). L'équation devient $at^2 + bt + c = 0$, une équation du second degré en t , que l'on résout classiquement. On ne conserve ensuite que les solutions $t \geq 0$ (une valeur de $t < 0$ étant impossible, puisque $t = x^2$), puis on revient à x en résolvant $x^2 = t$ pour chaque valeur de t retenue, ce qui donne $x = \pm\sqrt{t}$.

Résoudre $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

On pose $t = x^2$, avec $t \geq 0$. L'équation devient

$$t^2 - 5t - 36 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = 25 + 144 = 169 = 13^2 > 0$, d'où deux racines :

$$t_1 = \frac{5 - 13}{2} = -4, \quad t_2 = \frac{5 + 13}{2} = 9.$$

Comme $t = x^2 \geq 0$, on rejette $t_1 = -4$ (impossible), et l'on ne garde que $t_2 = 9$.

On revient alors à x :

$$x^2 = 9 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{-3, 3\}$.

Équations symétriques (ou réciproques)

Définition

Une équation **symétrique** (ou **réciproque**) de degré 4 est une équation de la forme

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0),$$

dont les coefficients, lus de gauche à droite ou de droite à gauche, sont les mêmes.

Méthode

On remarque d'abord que $x = 0$ n'est pas solution (car $a \neq 0$), ce qui permet de diviser toute l'équation par x^2 :

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0, \quad \text{soit} \quad a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

On pose alors $t = x + \frac{1}{x}$, et l'on utilise l'identité

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{soit} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2.$$

L'équation devient $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$, une équation du second degré en t . Pour chaque solution t trouvée, on revient à x en résolvant $x + \frac{1}{x} = t$, c'est-à-dire $x^2 - tx + 1 = 0$ (en multipliant par $x \neq 0$).

Résoudre $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

Les coefficients 6, 5, -38, 5, 6 sont bien symétriques. Comme $x = 0$ n'est pas solution, on divise par x^2 :

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0 \iff 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

On pose $t = x + \frac{1}{x}$, d'où $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, et l'équation devient :

$$6(t^2 - 2) + 5t - 38 = 0 \iff 6t^2 + 5t - 50 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = 25 + 1200 = 1225 = 35^2 > 0$, d'où :

$$t_1 = \frac{-5 - 35}{12} = -\frac{10}{3}, \quad t_2 = \frac{-5 + 35}{12} = \frac{5}{2}.$$

Retour à x pour $t_1 = -\frac{10}{3}$: $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$ équivaut à $3x^2 + 10x + 3 = 0$ (en multipliant par $3x$). Son discriminant est $\Delta' = 100 - 36 = 64 = 8^2$, d'où

$$x = \frac{-10 - 8}{6} = -3, \quad x = \frac{-10 + 8}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Retour à x pour $t_2 = \frac{5}{2}$: $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ équivaut à $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (en multipliant par $2x$). Son discriminant est $\Delta'' = 25 - 16 = 9 = 3^2$, d'où

$$x = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{5 + 3}{4} = 2.$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \left\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

Remarque

On observe que les racines se regroupent par paires **inverses l'une de l'autre** : -3 et $-\frac{1}{3}$, puis $\frac{1}{2}$ et 2 . C'est une conséquence générale de la symétrie des coefficients : si $x_0 \neq 0$ est solution, alors $\frac{1}{x_0}$ l'est aussi.

1.4 Équations paramétriques

Une équation **paramétrique** est une équation dont un ou plusieurs coefficients dépendent d'un paramètre réel (souvent noté $m, k, \dots$). La résoudre consiste à donner l'ensemble des solutions **en fonction de la valeur du paramètre**. Pour une équation du second degré, cela revient à étudier le signe du discriminant Δ , qui dépend lui-même du paramètre.

Méthode

1. Calculer Δ en fonction du paramètre.
2. Étudier le **signe** de Δ (c'est souvent lui-même un trinôme, ou une expression dont le signe s'étudie facilement) : cela partage les valeurs du paramètre en plusieurs cas.
3. Pour chaque cas, donner l'ensemble des solutions de l'équation, exprimées en fonction du paramètre.

Résoudre $x^2 + 2mx + 5m - 6 = 0$, x inconnue, selon les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$

Ici $a = 1$, $b = 2m$, $c = 5m - 6$. Le discriminant vaut

$$\Delta = (2m)^2 - 4 \times 1 \times (5m - 6) = 4m^2 - 20m + 24 = 4(m^2 - 5m + 6).$$

Le trinôme $m^2 - 5m + 6$ (en la variable m) a pour discriminant $25 - 24 = 1 > 0$ et pour racines 2 et 3 (on vérifie que $2 + 3 = 5$ et $2 \times 3 = 6$), donc $m^2 - 5m + 6 = (m - 2)(m - 3)$, et finalement

$$\Delta = 4(m - 2)(m - 3).$$

Le signe de Δ est donc celui de $(m - 2)(m - 3)$: positif à l'extérieur des racines 2 et 3, négatif entre elles.

m	$-\infty$	2	3	$+\infty$
Δ	+	0	0	+

On distingue donc trois cas.

Cas $m < 2$ ou $m > 3$ (donc $\Delta > 0$) : l'équation admet **deux solutions distinctes**. Comme $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4(m - 2)(m - 3)} = 2\sqrt{(m - 2)(m - 3)}$,

$$x = \frac{-2m - \sqrt{\Delta}}{2} = -m - \sqrt{(m - 2)(m - 3)},$$

$$x = \frac{-2m + \sqrt{\Delta}}{2} = -m + \sqrt{(m - 2)(m - 3)}.$$

Cas $m = 2$ ou $m = 3$ (donc $\Delta = 0$) : l'équation admet une **racine double** $x_0 = -m$, soit :

$$x_0 = -2 \text{ si } m = 2, \quad x_0 = -3 \text{ si } m = 3.$$

Cas $2 < m < 3$ (donc $\Delta < 0$) : l'équation n'admet **aucune solution réelle**.

Remarque

On peut vérifier ce résultat sur une valeur particulière : pour $m = 0$ (qui relève du premier cas), l'équation devient $x^2 - 6 = 0$, de solutions $x = \pm\sqrt{6}$; la formule ci-dessus donne bien $x = -0 \pm \sqrt{(0-2)(0-3)} = \pm\sqrt{6}$.

1.5 Racine carrée

Revenons pour finir sur la définition précise de la racine carrée, déjà utilisée à plusieurs reprises dans ce qui précède.

Définition

Soit x un réel **positif**. Il existe un unique réel y tel que

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x \end{cases}$$

Ce réel y est appelé **racine carrée** de x , et noté $\sqrt{x}$.

Remarque

La racine carrée n'est ainsi définie que pour $x \geq 0$, et l'on a toujours $\sqrt{x} \geq 0$: en particulier, $\sqrt{x}$ n'est **jamais négatif**, même lorsque x provient d'un carré. Par exemple $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, et non -3 : plus généralement, $\sqrt{u^2} = |u|$ pour tout réel u .

Méthode

Pour résoudre une équation de la forme $\sqrt{A(x)} = B(x)$:

1. Déterminer le **domaine** : il faut $A(x) \geq 0$.
2. Remarquer qu'une condition est **nécessaire** : puisque $\sqrt{A(x)} \geq 0$ (par définition de la racine carrée), il faut aussi $B(x) \geq 0$.
3. Sous ces deux conditions, les deux membres de l'équation sont alors positifs, et l'équation $\sqrt{A(x)} = B(x)$ équivaut à

$$A(x) = B(x)^2.$$

Attention

La condition $B(x) \geq 0$ est **indispensable** : sans elle, l'égalité $A(x) = B(x)^2$ n'est qu'une **conséquence** de l'équation de départ, et non une équivalence — élever au carré peut faire apparaître des solutions **parasites**, qu'il faut alors éliminer.

Résoudre $\sqrt{x^2 + 1} = x - 2$

Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x , le domaine (condition $A(x) \geq 0$) est $\mathbb{R}$ tout entier. Il faut de plus, condition nécessaire, que le membre de droite soit positif :

$$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2.$$

Sous cette condition $x \geq 2$, l'équation équivaut à

$$x^2 + 1 = (x - 2)^2 \iff x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 \iff 1 = -4x + 4 \iff 4x = 3 \iff x = \frac{3}{4}.$$

Or $x = \frac{3}{4}$ ne vérifie pas la condition $x \geq 2$: cette valeur doit donc être **rejetée**.
L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Remarque

On vérifie que $x = \frac{3}{4}$ était bien une solution **parasite**, introduite par l'élévation au carré : $\sqrt{(3/4)^2 + 1} = \sqrt{25/16} = \frac{5}{4}$, alors que $\frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4} \neq \frac{5}{4}$. L'équation $x^2 + 1 = (x - 2)^2$ était satisfaite, mais pas l'équation de départ, car le membre de droite $x - 2$ y est négatif.

2 La fonction valeur absolue

2.1 Définition, écriture comme maximum, représentation graphique

Définition

Soit x un réel. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est le réel défini par disjonction de cas :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque

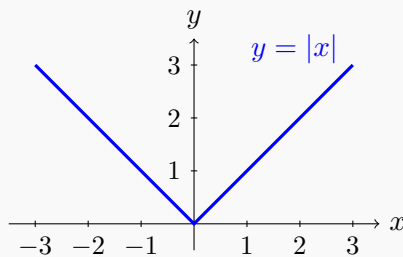
Cette définition se réécrit de façon équivalente et souvent utile :

$$|x| = \max(x, -x).$$

En effet, si $x \geq 0$ alors $-x \leq 0 \leq x$ donc $\max(x, -x) = x = |x|$; et si $x < 0$ alors $x < 0 < -x$ donc $\max(x, -x) = -x = |x|$. En particulier, $|x| \geq 0$ pour tout réel x , et $|x| = 0 \iff x = 0$.

Représentation graphique

La fonction $x \mapsto |x|$ est représentée par la réunion de deux demi-droites, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : la droite d'équation $y = x$ sur $[0, +\infty[$, et la droite d'équation $y = -x$ sur $] -\infty, 0]$.



2.2 Propriétés calculatoires et inégalité triangulaire

Propriétés calculatoires

Pour tous réels x et y , et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$|xy| = |x| |y| \qquad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0) \qquad |x^n| = |x|^n$$

$$|-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

Attention

En revanche, il n'y a **pas** d'égalité entre $|x + y|$ et $|x| + |y|$ en général : on a seulement l'**inégalité triangulaire**

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire, par élévation au carré

Les deux membres $|x + y|$ et $|x| + |y|$ étant positifs, l'inégalité $|x + y| \leq |x| + |y|$ équivaut à la comparaison de leurs carrés. On calcule séparément chacun d'eux :

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x| |y| + |y|^2 = x^2 + 2|x| |y| + y^2.$$

Or $xy \leq |xy| = |x| |y|$ (tout réel est inférieur ou égal à sa valeur absolue), donc, en comparant terme à terme :

$$|x + y|^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x| |y| + y^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Les deux membres de départ étant positifs, on en déduit $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Remarque

L'égalité a lieu si et seulement si $xy = |x| |y|$, c'est-à-dire si et seulement si x et y sont de même signe (au sens large).

2.3 Interprétation en termes de distance

Remarque

Sur la droite réelle, $|x|$ représente la **distance** entre le point d'abscisse x et l'origine 0. Plus généralement, pour deux réels x et y , le réel $|x - y|$ représente la distance entre les points d'abscisses x et y :

$$|x - y| = \text{dist}(x, y).$$

Résoudre $|x + 7| = 2$

On écrit $|x + 7| = |x - (-7)|$, qui représente la distance entre x et -7 . L'équation demande donc que x soit à distance exactement 2 de -7 :

$$|x + 7| = 2 \iff x = -7 - 2 \text{ ou } x = -7 + 2 \iff x = -9 \text{ ou } x = -5.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-9, -5\}$.

Résoudre $|x + 7| \leq 2$

De même, il s'agit des réels x situés à distance au plus 2 de -7 , c'est-à-dire de l'intervalle centré en -7 et de rayon 2 :

$$|x + 7| \leq 2 \iff -9 \leq x \leq -5.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [-9, -5]$.

Résoudre $|x - 7| > 3$

Ici, $|x - 7|$ représente la distance entre x et 7. L'inéquation demande que cette distance soit strictement supérieure à 3, c'est-à-dire que x soit à l'**extérieur** de l'intervalle centré en 7 et de rayon 3 :

$$|x - 7| > 3 \iff x < 4 \text{ ou } x > 10.$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty, 4[\cup]10, +\infty[$.

2.4 Méthode universelle : disjonction de cas

Résoudre une équation ou inéquation avec valeurs absolues, dans le cas général

Lorsque l'interprétation en distance ne s'applique pas directement (par exemple lorsque l'inconnue apparaît dans plusieurs valeurs absolues, ou face à une expression qui n'est pas une constante), on procède par **disjonction de cas** :

1. On dresse un **tableau de signes** de chacune des expressions placées sous une valeur absolue, ce qui découpe $\mathbb{R}$ en intervalles.
2. Sur chacun de ces intervalles, le signe de chaque expression est constant : on peut donc lever chaque valeur absolue (en gardant l'expression, ou en prenant son opposée, selon le signe), et résoudre l'équation ou l'inéquation ainsi obtenue, **sans valeur absolue**.
3. On ne conserve, sur chaque intervalle, que les solutions trouvées qui appartiennent effectivement à cet intervalle, puis on rassemble les résultats obtenus sur l'ensemble

des intervalles.

Résoudre $|2x + 7| = |x + 5| + 3$

On étudie d'abord le signe des deux expressions placées sous une valeur absolue, $2x + 7$ et $x + 5$, qui s'annulent respectivement en $-\frac{7}{2}$ et -5 :

x	$-\infty$	-5	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2x + 7$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$

Cas 1 : $x \leq -5$. Alors $2x + 7 < 0$ et $x + 5 \leq 0$, donc $|2x + 7| = -2x - 7$ et $|x + 5| = -x - 5$. L'équation devient

$$-2x - 7 = -x - 5 + 3 \iff -2x - 7 = -x - 2 \iff -x = 5 \iff x = -5.$$

Cette valeur $x = -5$ appartient bien à l'intervalle $] -\infty, -5]$ étudié.

Cas 2 : $-5 \leq x \leq -\frac{7}{2}$. Alors $2x + 7 \leq 0$ et $x + 5 \geq 0$, donc $|2x + 7| = -2x - 7$ et $|x + 5| = x + 5$. L'équation devient

$$-2x - 7 = x + 5 + 3 \iff -2x - 7 = x + 8 \iff -3x = 15 \iff x = -5.$$

Cette valeur $x = -5$ appartient bien à l'intervalle $[-5, -\frac{7}{2}]$ étudié.

Cas 3 : $x \geq -\frac{7}{2}$. Alors $2x + 7 \geq 0$ et $x + 5 \geq 0$, donc $|2x + 7| = 2x + 7$ et $|x + 5| = x + 5$. L'équation devient

$$2x + 7 = x + 5 + 3 \iff 2x + 7 = x + 8 \iff x = 1.$$

Cette valeur $x = 1$ appartient bien à l'intervalle $[-\frac{7}{2}, +\infty[$ étudié.

En rassemblant les trois cas, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-5, 1\}$.

Remarque

On vérifie ces deux solutions : pour $x = -5$, $|2(-5) + 7| = |-3| = 3$ et $|-5 + 5| + 3 = 0 + 3 = 3$. Pour $x = 1$, $|2 + 7| = 9$ et $|1 + 5| + 3 = 6 + 3 = 9$.

3 Limites**Notation**

Pour signifier que $f(x)$ tend vers ℓ (un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$) lorsque x tend vers a (un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$), on note indifféremment

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

3.1 Limites des fonctions polynômes en l'infini

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels, avec $a_n \neq 0$ si $n \geq 1$. La fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

est appelée **fonction polynôme** (ou polynôme) de **degré** n . Le terme $a_n x^n$, celui de plus haut degré, est appelé son **terme dominant**.

Limite d'un polynôme en l'infini

Soit $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme de degré $n \geq 1$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n.$$

En d'autres termes, un polynôme a, en $+\infty$ comme en $-\infty$, la même limite que son terme dominant.

Justification : la limite d'un polynôme est celle de son terme dominant

Pour $x \neq 0$, on met $a_n x^n$ en facteur dans l'expression de $P(x)$:

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, chacun des termes $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^n}$ tend vers 0, donc le facteur entre parenthèses tend vers 1. Le produit $P(x)$ a donc, en $+\infty$ comme en $-\infty$, la même limite que $a_n x^n$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 + 2)$

Le terme dominant est $3x^3$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 5x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty.$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 + 7x - 1)$

Le terme dominant est $-2x^4$, donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 + 7x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4).$$

Or $x^4 \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow -\infty$ (puissance paire), donc $-2x^4 \rightarrow -\infty$. Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^4 + 7x - 1) = -\infty.$$

3.2 Limites des fonctions rationnelles en l'infini

Définition

Une **fonction rationnelle** est un quotient $\frac{P}{Q}$ de deux fonctions polynômes P et Q , la fonction Q n'étant pas la fonction nulle.

Limite d'une fonction rationnelle en l'infini

Soient P et Q deux fonctions polynômes, de termes dominants respectifs $a_n x^n$ et $b_m x^m$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

En d'autres termes, un quotient de polynômes a, en $+\infty$ comme en $-\infty$, la même limite que le quotient de leurs termes dominants.

Justification : la limite d'un quotient de polynômes est celle du quotient de leurs termes dominants

En mettant $a_n x^n$ en facteur au numérateur et $b_m x^m$ en facteur au dénominateur, comme précédemment :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \dots + \frac{b_0}{b_m x^m}}.$$

Les deux facteurs entre parenthèses tendant chacun vers 1 en $+\infty$ et en $-\infty$, leur quotient tend lui aussi vers 1. Le quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ a donc, en $+\infty$ comme en $-\infty$, la même limite que $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Remarque

Le quotient des termes dominants se simplifie en une puissance de x :

$$\frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

Trois cas se présentent alors, selon la comparaison des degrés n et m :

- si $n > m$, la limite est infinie (le signe et la valeur en $-\infty$ dépendent de la parité de $n - m$ et du signe de $\frac{a_n}{b_m}$) ;
- si $n = m$, la limite est finie, égale à $\frac{a_n}{b_m}$;
- si $n < m$, la limite est nulle.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{5x^2 - x + 4}$

Les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux (tous deux égaux à 2), donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1}{5x^2 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}.$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

Le degré du numérateur (3) est supérieur à celui du dénominateur (2), donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x^3 - 5}$

Le degré du numérateur (1) est inférieur à celui du dénominateur (3), donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x^3 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0.$$

3.3 Méthode de la quantité conjuguée

Lever une indétermination du type $\infty - \infty$ faisant intervenir une racine carrée

Lorsqu'une limite se présente sous une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ » faisant intervenir une différence avec une racine carrée, on multiplie et on divise par la **quantité conjuguée**, c'est-à-dire l'expression obtenue en changeant le signe entre les deux termes. On utilise alors l'identité remarquable

$$(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$$

pour faire disparaître la racine carrée au numérateur, avant d'étudier la limite du quotient ainsi obtenu (souvent à l'aide de la règle du terme dominant).

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $\sqrt{x^2 + x} \rightarrow +\infty$ et $x \rightarrow +\infty$: on est donc face à une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

On multiplie et on divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + x} + x$:

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

Pour $x > 0$, on a $\sqrt{x^2 + x} = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ (car $\sqrt{x^2} = x$ pour $x > 0$), donc

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, donc $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1$, et finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Remarque

On vérifie numériquement ce résultat : pour $x = 100$, $\sqrt{x^2 + x} - x = \sqrt{10100} - 100 \approx 100,499 - 100 = 0,499$, une valeur proche de $\frac{1}{2}$.

4 Dérivation des fonctions**4.1 Équations de droites non verticales****Définition**

Une droite non verticale du plan admet une équation de la forme $y = mx + p$, où $m \in \mathbb{R}$ est appelé son **coefficient directeur** (ou sa **pen**te), et $p \in \mathbb{R}$ son **ordonnée à l'origine**.

Coefficient directeur d'une droite passant par deux points

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan, avec $x_A \neq x_B$ (autrement dit, la droite (AB) n'est pas verticale). Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Justification

La droite (AB) admet une équation de la forme $y = mx + p$. Les coordonnées de A et de B vérifient toutes deux cette équation :

$$y_A = mx_A + p \quad \text{et} \quad y_B = mx_B + p.$$

En soustrayant ces deux égalités, le terme p disparaît :

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A).$$

Comme $x_B \neq x_A$, on peut diviser par $x_B - x_A$, ce qui donne $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Remarque

Ce coefficient directeur mesure la variation de y rapportée à la variation de x entre A et B : c'est pourquoi on l'appelle aussi le **taux d'accroissement** entre A et B .

Déterminer l'équation de la droite passant par $A(1, 2)$ et $B(4, 11)$

Le coefficient directeur est

$$m = \frac{11 - 2}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3.$$

La droite (AB) a alors pour équation $y = m(x - x_A) + y_A$, soit

$$y = 3(x - 1) + 2 = 3x - 1.$$

4.2 Définition de la dérivée en un point

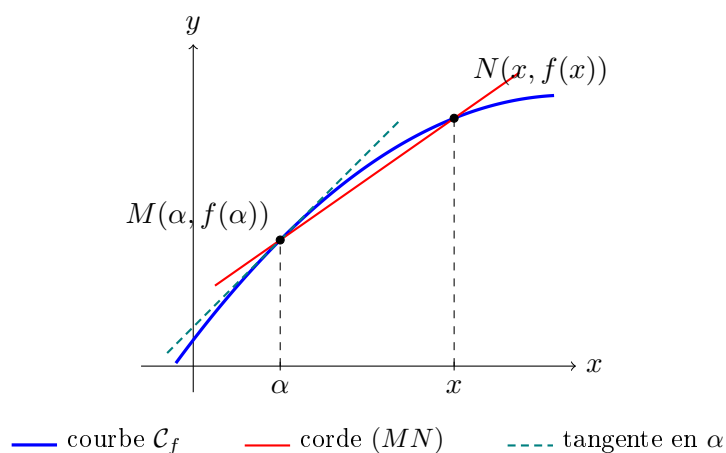
Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit $\alpha \in I$. Pour tout réel $x \in I$ distinct de α , le **taux d'accroissement** de f entre α et x est le réel

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Remarque

D'après le paragraphe précédent, ce taux d'accroissement $\tau(x)$ est exactement le coefficient directeur de la **corde** (MN) , la droite sécante joignant les points $M(\alpha, f(\alpha))$ et $N(x, f(x))$ de la courbe représentative de f .



Remarque

Lorsque x se rapproche de α , le point N glisse le long de la courbe $\mathcal{C}_f$ en se rapprochant de M , et la corde (MN) pivote autour de M en se rapprochant de la **tangente** à la courbe au point M . Le taux d'accroissement $\tau(x)$, qui est la pente de la corde (MN) , tend donc vers la pente de cette tangente lorsque $x \rightarrow \alpha$.

Dérivée en un point

On dit que f est **dérivable en** α lorsque le taux d'accroissement $\tau(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ admet une limite **finie** lorsque x tend vers α . Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en α , noté $f'(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Interprétation géométrique du nombre dérivé

Lorsque f est dérivable en α , la courbe représentative de f admet, au point $M(\alpha, f(\alpha))$, une tangente non verticale dont le coefficient directeur est exactement le nombre dérivé $f'(\alpha)$.

Remarque

C'est précisément ce qu'illustre le schéma précédent : la pente de la tangente en α est la limite, lorsque $x \rightarrow \alpha$, de la pente de la corde (MN) — c'est-à-dire la limite du taux d'accroissement, donc le nombre dérivé $f'(\alpha)$.

Équation de la tangente en un point

Lorsque f est dérivable en α , la tangente à la courbe représentative de f au point $M(\alpha, f(\alpha))$ a pour équation :

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$$

En développant et en regroupant les termes constants, cette équation se réécrit sous la forme réduite $y = mx + p$:

$$y = f'(\alpha)x + (f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)),$$

ce qui met en évidence son coefficient directeur $m = f'(\alpha)$ et son ordonnée à l'origine $p = f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$.

Remarque

C'est exactement l'équation $y = m(x - x_A) + y_A$ d'une droite passant par un point $A(x_A, y_A)$, vue précédemment, appliquée au point $A = M(\alpha, f(\alpha))$ et au coefficient directeur $m = f'(\alpha)$.

Existe-t-il des tangentes communes aux courbes de $x \mapsto x^2$ et de $x \mapsto \frac{1}{x}$?

Notons $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ (sur $\mathbb{R}^*$), de sorte que $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse α a pour équation

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 = 2\alpha x - \alpha^2,$$

de coefficient directeur 2α et d'ordonnée à l'origine $-\alpha^2$.

La tangente à la courbe de g au point d'abscisse $\beta \neq 0$ a pour équation

$$y = g'(\beta)(x - \beta) + g(\beta) = -\frac{1}{\beta^2}(x - \beta) + \frac{1}{\beta} = -\frac{x}{\beta^2} + \frac{2}{\beta},$$

de coefficient directeur $-\frac{1}{\beta^2}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{2}{\beta}$.

Ces deux droites sont confondues si et seulement si leurs coefficients directeurs et leurs ordonnées à l'origine coïncident respectivement, c'est-à-dire si et seulement si

$$2\alpha = -\frac{1}{\beta^2} \quad \text{et} \quad -\alpha^2 = \frac{2}{\beta}.$$

De la première équation, on tire

$$\alpha = -\frac{1}{2\beta^2}, \quad \text{donc} \quad \alpha^2 = \frac{1}{4\beta^4}.$$

En reportant dans la seconde équation :

$$-\frac{1}{4\beta^4} = \frac{2}{\beta}.$$

En multipliant les deux membres par β (non nul) :

$$-\frac{1}{4\beta^3} = 2 \iff \beta^3 = -\frac{1}{8} \iff \beta = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit

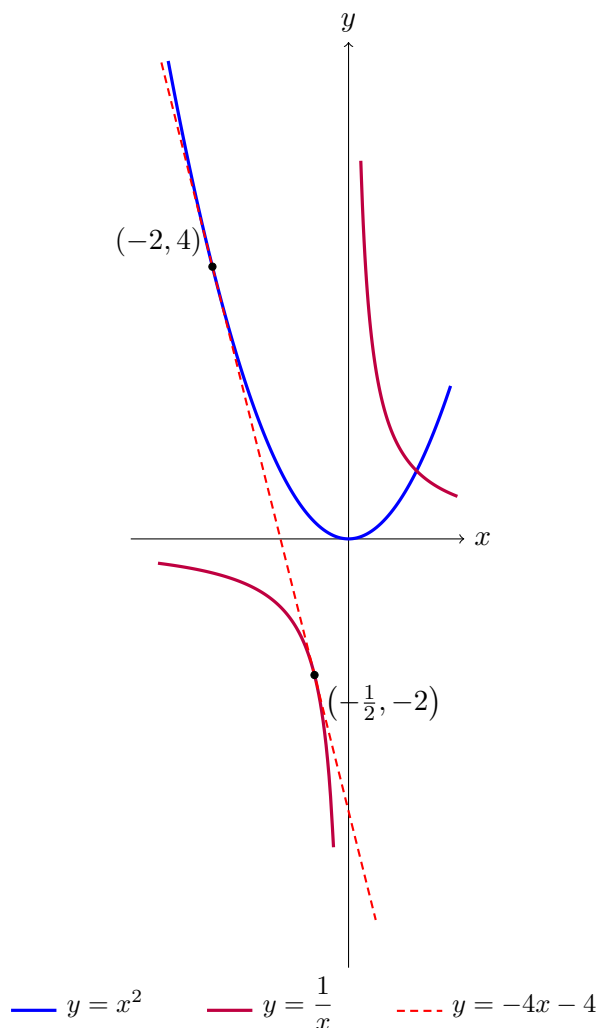
$$\alpha = -\frac{1}{2\beta^2} = -\frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} = -2.$$

On vérifie ce résultat : la tangente au carré en $\alpha = -2$ a pour équation $y = 2\alpha x - \alpha^2 = -4x - 4$, et la tangente à l'inverse en $\beta = -\frac{1}{2}$ a pour équation $y = -\frac{x}{\beta^2} + \frac{2}{\beta} = -4x - 4$: ces deux droites coïncident bien.

Il existe donc une unique tangente commune aux deux courbes, la droite d'équation $y = -4x - 4$, tangente à la parabole au point $(-2, 4)$ et à l'hyperbole au point $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$.

Remarque

L'équation $\beta^3 = -\frac{1}{8}$ n'admet qu'une seule solution réelle (ses deux autres racines cubiques sont complexes), ce qui confirme l'unicité de cette tangente commune.



Remarque

En posant $x = \alpha + h$ (donc $h = x - \alpha \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow \alpha$), le taux d'accroissement se réécrit $\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$, et la définition de la dérivée prend la forme équivalente, elle aussi très utilisée :

$$f'(\alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}.$$

4.3 Étude de la dérivabilité de la fonction racine carrée

On note f la fonction racine carrée, définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Étudier la dérivabilité de f en 0

Pour $x > 0$, le taux d'accroissement de f entre 0 et x est

$$\tau(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or $\sqrt{x} \rightarrow 0^+$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Cette limite n'étant pas finie, la fonction f n'est **pas dérivable** en 0.

Remarque

Bien qu'elle ne soit pas dérivable en 0, la fonction racine carrée y admet une **tangente verticale** (l'axe des ordonnées) : c'est la traduction géométrique du fait que la pente de la corde, $\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

Étudier la dérivabilité de f en un réel $\alpha > 0$

Pour $x > 0$ et $x \neq \alpha$, le taux d'accroissement s'écrit

$$\tau(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{x - \alpha}.$$

On reconnaît au dénominateur une différence de carrés, puisque $x - \alpha = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{\alpha})^2$, qui se factorise à l'aide de la quantité conjuguée $\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}$:

$$x - \alpha = (\sqrt{x} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}).$$

On en déduit, pour $x \neq \alpha$,

$$\tau(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{(\sqrt{x} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}}.$$

Comme $\alpha > 0$, on a $\sqrt{x} + \sqrt{\alpha} \rightarrow 2\sqrt{\alpha} \neq 0$ lorsque $x \rightarrow \alpha$, donc

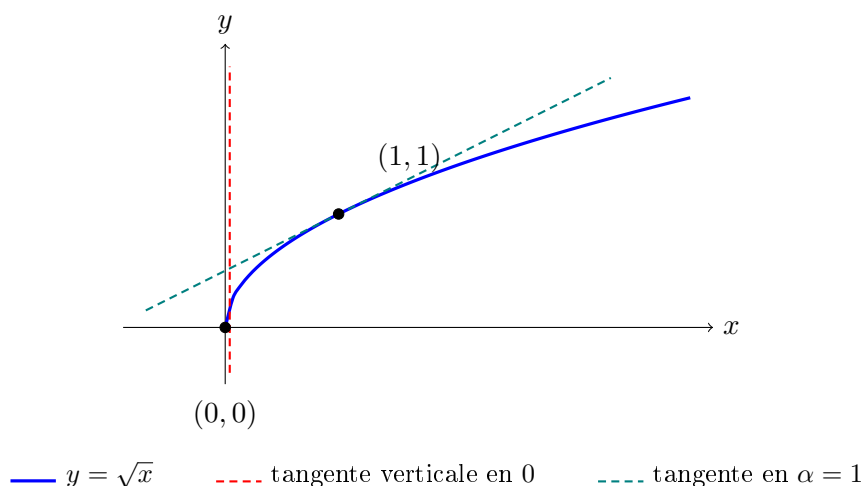
$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \tau(x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Cette limite étant finie, la fonction f est **dérivable** en α , de nombre dérivé

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Remarque

On retrouve ainsi le résultat classique : la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, mais elle n'est pas dérivable en 0 (où elle admet seulement une tangente verticale).



4.4 Règles de calcul des dérivées

Combinaison linéaire, produit, inverse, quotient

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et λ, μ deux réels. Alors :

- la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I , de dérivée

$$(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v';$$

- la fonction uv est dérivable sur I , de dérivée

$$(uv)' = u'v + uv';$$

- si u ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I , de dérivée

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2};$$

- si v ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I , de dérivée

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Remarque

Ces formules seront démontrées dans le chapitre consacré à la dérivation ; on les utilise ici comme des outils de calcul, au même titre que les dérivées usuelles (x^n , $\sqrt{x}$, etc.) déjà rencontrées.

Dériver $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$

On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 - 3$, de sorte que $f = uv$, avec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$. D'après la règle du produit,

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x).$$

En développant,

$$f'(x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6.$$

Dériver $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ sur $I =]2, +\infty[$

On pose $u(x) = x + 1$ et $v(x) = x - 2$, de sorte que $g = \frac{u}{v}$, avec $u'(x) = 1$, $v'(x) = 1$, et v ne s'annule pas sur I . D'après la règle du quotient,

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(x-2) - (x+1)}{(x-2)^2}.$$

En simplifiant le numérateur,

$$g'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

4.5 Fonctions composées

Définition

Soient $f : D \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow R$ deux fonctions (l'ensemble d'arrivée de f étant l'ensemble de départ de g). On appelle **composée de f par g** , notée $g \circ f$, la fonction

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque

Pour calculer $(g \circ f)(x)$, on applique d'abord f à x (ce qui donne un élément de E), puis g à ce résultat (ce qui donne un élément de R) : la lecture se fait de **droite à gauche**.

Composer les fonctions $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$ et $h(x) = x^2$

On calcule, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} (h \circ f)(x) &= h(f(x)) = h(x + 1) = (x + 1)^2, \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = g(x^2) = 2x^2, \\ (h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) = h(2(x + 1)) = (2x + 2)^2. \end{aligned}$$

Attention

La composition n'est **pas commutative** : en général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Comparer $h \circ f$ et $f \circ h$, avec $f(x) = x + 1$ et $h(x) = x^2$

$$(h \circ f)(x) = (x + 1)^2 \quad \text{alors que} \quad (f \circ h)(x) = x^2 + 1.$$

Ces deux fonctions sont différentes : par exemple en $x = 1$, $(h \circ f)(1) = 4$ alors que $(f \circ h)(1) = 2$.

4.6 Dérivée d'une fonction composée

Règle de la chaîne

Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction dérivable sur l'intervalle I , et g une fonction dérivable sur l'intervalle J . Alors $g \circ f$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Notation de Leibniz

En posant $y = g(u)$ avec $u = f(x)$, cette formule s'écrit de façon mnémotechnique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

Attention

Ceci n'est pas une véritable simplification de fractions (les du ne sont pas des nombres que l'on puisse « annuler ») ; c'est seulement un moyen mnémotechnique de retenir la formule.

Dériver une fonction composée $h = g \circ f$

1. Identifier la fonction **extérieure** g et la fonction **intérieure** f .
2. Dériver la fonction extérieure g , en l'évaluant en $f(x)$ (sans la simplifier trop vite).
3. Multiplier par la dérivée $f'(x)$ de la fonction intérieure.

Dériver $h(x) = (3x + 2)^5$

On pose $f(x) = 3x + 2$ (intérieure) et $g(u) = u^5$ (extérieure), donc $g'(u) = 5u^4$. D'après la règle de la chaîne,

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 3 \times 5(3x + 2)^4 = 15(3x + 2)^4.$$

Dériver $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$, sur $] -1, 1[$

On pose $f(x) = 1 - x^2$ et $g(u) = \sqrt{u}$, donc $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$. D'après la règle de la chaîne,

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = -2x \times \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dériver $h(x) = e^{-x^2}$

On pose $f(x) = -x^2$ et $g(u) = e^u$, donc $g'(u) = e^u$. D'après la règle de la chaîne,

$$h'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = -2x \times e^{-x^2} = -2x e^{-x^2}.$$

Composition triple : dériver $h(x) = \sin(e^{2x})$

On « épluche » l'expression de l'extérieur vers l'intérieur : la fonction la plus extérieure est $\sin$, puis $u \mapsto e^u$, puis $x \mapsto 2x$ (la plus intérieure). En dérivant successivement chaque étage et en multipliant les dérivées obtenues :

$$h'(x) = \cos(e^{2x}) \times e^{2x} \times 2 = 2e^{2x} \cos(e^{2x}).$$

Erreur classique à éviter

Une erreur fréquente consiste à **oublier de multiplier par la dérivée de la fonction intérieure**. Par exemple, pour $h(x) = \sin(3x)$:

$$\text{FAUX : } h'(x) = \cos(3x) \qquad \text{correct : } h'(x) = 3 \cos(3x).$$