
Fonctions usuelles.

Bijections

Exercice 1. *Bijection d'une fonction homographique*

Soit $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

- a) En résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x , montrer que f réalise une bijection de I sur un ensemble J que l'on précisera.
- b) Expliciter f^{-1} .

Exercice 2. *Bijection d'un trinôme du second degré*

Soit $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, définie sur $I = [2, +\infty[$.

- a) Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
- b) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera, et expliciter f^{-1} .

Exercice 3. *Théorème de la bijection : une bijection non explicite*

Soit $f(x) = x^5 + 3x - 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Montrer, à l'aide du théorème de la bijection, que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Peut-on expliciter f^{-1} ? Justifier l'existence de $f^{-1}(3)$ malgré tout.

Exercice 4. *Dérivabilité de la réciproque, cas de $f(x) = e^x + x$*

Soit $f(x) = e^x + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Justifier que f^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
- c) Sachant que $f(0) = 1$, calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 5. *Bijection restreinte à un intervalle et dérivabilité de la réciproque*

Soit $f(x) = x^3 - 3x$, définie sur $I = [1, +\infty[$.

- a) Étudier les variations de f sur I , et montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) f^{-1} est-elle dérivable sur J tout entier ? On distinguera le point $f(1)$ des autres points de J .

Rappels de trigonométrie

Exercice 6. Valeurs remarquables et angles associés

Calculer, sans calculatrice, à l'aide des angles associés et des valeurs remarquables :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \quad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right), \quad \cos\left(\frac{11\pi}{3}\right).$$

Exercice 7. Résolution d'équations trigonométriques élémentaires

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$:

$$(a) \cos(x) = \frac{1}{2}, \quad (b) \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (c) \tan(x) = \sqrt{3}.$$

Exercice 8. Simplification trigonométrique

Simplifier au maximum, pour tout réel x :

$$A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(-x).$$

Exercice 9. Formules d'addition

En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide des formules d'addition.

Exercice 10. Équation trigonométrique par congruences (I)

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \cos(x)$.

Exercice 11. Formules de duplication

Sachant que $\cos(x) = \frac{3}{5}$ et $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, calculer $\sin(x)$, $\tan(x)$, puis $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

Exercice 12. Équation trigonométrique par congruences (II)

Résoudre dans $\mathbb{R}$, à l'aide des congruences, l'équation

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 13. Lecture graphique : nombre de solutions de $\tan(x) = 10$

À l'aide du graphe de la fonction $\tan$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $\tan(x) = 10$ sur l'intervalle $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, puis sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 14. Valeurs remarquables des fonctions réciproques

Calculer, sans calculatrice :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arctan(-1), \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 15. Simplifications $\cos(\arcsin x)$ et $\sin(\arccos x)$

Pour $x \in [-1, 1]$, simplifier $\cos(\arcsin(x))$. Pour $x \in [-1, 1]$, simplifier $\sin(\arccos(x))$.

Exercice 16. Résolution d'équations avec fonctions réciproques

Résoudre :

$$(a) \arcsin(x) = \frac{\pi}{6}, \quad (b) \arctan(x) = \frac{\pi}{3}, \quad (c) \arccos(x) = \frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 17. *Étude de $\arctan(x) + \arctan(1/x)$*

On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

- a) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$.
- b) En déduire que f est constante sur $]0, +\infty[$, puis déterminer cette constante en évaluant f en une valeur bien choisie.

Exercice 18. *Dérivabilité de $\arcsin(x^2)$*

Soit $g(x) = \arcsin(x^2)$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition de g .
- b) Déterminer l'ensemble sur lequel g est dérivable, et calculer $g'(x)$.

Logarithme, exponentielle et fonctions puissances

Exercice 19. *Résolution d'équations logarithmiques et exponentielles*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (en précisant le domaine de validité) :

$$(a) \ln(x+1) = 2, \quad (b) e^{2x-1} = 3, \quad (c) \ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6).$$

Exercice 20. *Simplifications de logarithmes et d'exponentielles*

Simplifier, sans calculatrice :

$$\ln(e^3 \sqrt{e}), \quad \exp(2 \ln 3 - \ln 5), \quad \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) + \ln(e^5).$$

Exercice 21. *Étude de $x \ln(x) - x$*

Soit $f(x) = x \ln(x) - x$, définie sur $]0, +\infty[$.

- a) Calculer $f'(x)$, et en déduire les variations de f .
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (on pourra utiliser une croissance comparée).

Exercice 22. *Calcul de dérivées usuelles*

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant son ensemble de dérivabilité :

$$f(x) = \ln(1+x^2), \quad g(x) = e^{-x^2}, \quad h(x) = x^{\sqrt{2}}, \quad k(x) = \ln(\cos(x)).$$

Exercice 23. *Limites de référence*

À l'aide des limites de référence, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3} - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}.$$

Exercice 24. *Croissances comparées*

À l'aide des croissances comparées, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}}.$$

Exercice 25. *Limites par mise en facteur du terme dominant*

En mettant le terme dominant en facteur, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - e^x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x.$$

Exercice 26. *Puissances rationnelles*

Calculer $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{16}$, puis résoudre $x^{3/2} = 8$ d'inconnue $x \geq 0$.

Exercice 27. *Étude de $x \mapsto x^x$*

On pose, pour $x > 0$, $f(x) = x^x$.

- a) Réécrire $f(x)$ à l'aide de $\exp$ et $\ln$.
- b) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
- c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (on pourra utiliser une croissance comparée).

Corrigés

Bijections

Exercice 1. a) $y = \frac{3x-1}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) = 3x-1 \Leftrightarrow x(y-3) = -1-2y \Leftrightarrow x = \frac{-1-2y}{y-3}$ (possible ssi $y \neq 3$, et on vérifie $x \neq -2$) : bijection de I sur $J = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. b) $f^{-1}(y) = \frac{-2y-1}{y-3} = \frac{2y+1}{3-y}$.

Exercice 2. a) $f(x) = -(x-2)^2 + 3$. b) Sur $[2, +\infty[$, $x-2 \geq 0$; $y = -(x-2)^2 + 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 3-y \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3-y}$ (nécessite $y \leq 3$) : bijection de $[2, +\infty[$ sur $J =]-\infty, 3]$, $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{3-y}$.

Exercice 3. a) $f'(x) = 5x^4 + 3 > 0$: f strictement croissante, continue, avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. b) On ne sait pas résoudre $x^5 + 3x - 1 = 3$ algébriquement ; $f^{-1}(3)$ existe malgré tout car $3 \in J = \mathbb{R}$ (théorème de la bijection).

Exercice 4. a) $f'(x) = e^x + 1 > 0$, continue, limites $\mp\infty$ en $\mp\infty$: bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. b) $f'(x) = e^x + 1 \neq 0$ pour tout x : f^{-1} dérivable partout. c) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$ (car $f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$).

Exercice 5. a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$, nul seulement en $x = 1$: f strictement croissante sur I . $f(1) = -2$, $\lim_{+\infty} f = +\infty$: bijection de $I = [1, +\infty[$ sur $J = [-2, +\infty[$. b) $f'(1) = 0$ (tangente horizontale) : f^{-1} n'est pas dérivable en $f(1) = -2$. Pour $y \in]-2, +\infty[$, $y = f(x)$ avec $x > 1$, donc $f'(x) = 3(x^2 - 1) > 0$: f^{-1} est dérivable sur $] -2, +\infty[$.

Trigonométrie

Exercice 6. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$; $\cos\left(\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 7. (a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; dans $[0, 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$. (b) $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; dans $[0, 2\pi[$: $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$. (c) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$; dans $[0, 2\pi[$: $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$.

Exercice 8. $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\cos(-x) = \cos x$: donc $A(x) = -\cos x + \cos x - \cos x = -\cos x$.

Exercice 9. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 10. $\cos(2x) = \cos(x) \iff 2x \equiv x [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -x [2\pi] \iff x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv 0 [2\pi] \iff x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } x \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{3}\right]$. Dans $[0, 2\pi[$, la première condition donne $x = 0$ et la seconde donne $x \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$. $\mathcal{S} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.

Exercice 11. $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin x > 0$: $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$.

Exercice 12. $2x - \frac{\pi}{3} \equiv x + \frac{\pi}{6} [2\pi]$ ou $2x - \frac{\pi}{3} \equiv -(x + \frac{\pi}{6}) [2\pi]$. La première donne $x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. La seconde donne $3x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$, soit $x \equiv \frac{\pi}{18} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$. $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 13. Sur $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\setminus \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$, on distingue trois intervalles $]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$, $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$; sur chacun, $\tan$ réalise une bijection sur $\mathbb{R}$, donc l'équation $\tan(x) = 10$ y admet exactement **une** solution : il y a donc **3 solutions** sur cet intervalle. Sur $\mathbb{R}$ tout entier, il y a une solution par intervalle de longueur π , donc une **infinité** de solutions, $x = \arctan(10) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 14. $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$; $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$; $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 15. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ (positif car $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$); $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ (positif car $\arccos x \in [0, \pi]$).

Exercice 16. (a) $x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. (b) $x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. (c) $x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 17. a) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$. b) f est donc constante sur $]0, +\infty[$; $f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

Exercice 18. a) $x^2 \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in [-1, 1] : D_g = [-1, 1]$. b) arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$, donc g est dérivable là où $x^2 \in] - 1, 1[$, soit sur $] - 1, 1[; g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

Logarithme, exponentielle, fonctions puissances

Exercice 19. (a) $x + 1 = e^2$, soit $x = e^2 - 1$ (valide, > -1). (b) $2x - 1 = \ln 3$, soit $x = \frac{1+\ln 3}{2}$. (c) Domaine $x > 1 ; \ln(x(x-1)) = \ln 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -2$ (rejeté) : $x = 3$.

Exercice 20. $\ln(e^3 \sqrt{e}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} ; \exp(2 \ln 3 - \ln 5) = \frac{9}{5} ; \ln(1/e^2) + \ln(e^5) = -2 + 5 = 3$.

Exercice 21. a) $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$: négative sur $]0, 1[$, positive sur $]1, +\infty[: f$ décroît sur $]0, 1[$ puis croît sur $]1, +\infty[$. b) $x \ln x - x \rightarrow 0 - 0 = 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ (croissance comparée $x \ln x \rightarrow 0$).

Exercice 22. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R} ; g'(x) = -2x e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R} ; h'(x) = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$ sur $]0, +\infty[; k'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$, sur les intervalles où $\cos x > 0$.

Exercice 23. $\lim \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$ (poser $u = 2x$) ; $\lim \frac{\ln(1+3x)}{x} = 3$; $\lim \frac{x^{1/3}-1}{x-1} = \frac{1}{3}$; $\lim \frac{1-\cos x}{x} = -\lim \frac{\cos x-1}{x} = 0$.

Exercice 24. Toutes ces limites valent 0, sauf $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte).

Exercice 25. $x^2 - e^x = e^x \left(\frac{x^2}{e^x} - 1 \right) \rightarrow +\infty \cdot (0 - 1) = -\infty$. $\ln(x) - x = x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) \rightarrow +\infty \cdot (0 - 1) = -\infty$. En posant $t = -x \rightarrow +\infty : x^2 e^x = t^2 e^{-t} \rightarrow 0$ (croissance comparée).

Exercice 26. $\sqrt[3]{27} = 3 ; \sqrt[4]{16} = 2 ; x^{3/2} = 8 \Leftrightarrow x = 8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$.

Exercice 27. a) $f(x) = e^{x \ln x}$. b) $x \mapsto x \ln x$ dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\ln x + 1$; par composition, f dérivable et $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x} = (\ln x + 1)x^x$. c) $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ (croissance comparée), donc $f(x) = e^{x \ln x} \rightarrow e^0 = 1$.