

Rappels et compléments d'analyse.

Exercice 1. Équations et inéquations du second degré

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+2)^2 = -1 \quad (1)$$

$$(x+2)^2 = 2 \quad (2)$$

$$(x+1)^2 = -2x+6 \quad (3)$$

$$(2x-1)^2 = -(3x-2)^2 \quad (4)$$

Résoudre également les inéquations suivantes :

$$(x+2)^2 \geq 9 \quad (1)$$

$$x^2 - 5x + 3 > 0 \quad (2)$$

$$-3x^2 + 2x - 2 > 0 \quad (3)$$

$$\frac{2x+3}{x^2-2x+3} > 1 \quad (4)$$

Exercice 2. Équations, inéquations qui se ramènent à des problèmes du second degré

1. Résoudre l'inéquation bicarrée suivante :

$$-3x^4 + 2x^2 - \frac{1}{4} < 0.$$

2. Résoudre l'équation suivante à l'aide du changement de variable $y = x + \frac{1}{x}$:

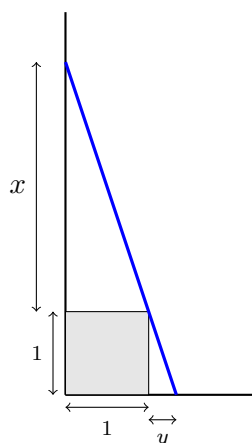
$$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2+1} = x-2$$

Exercice 3. Une échelle contre un mur

On dispose une échelle de 4 mètres de long contre un mur, de sorte que l'échelle s'appuie également sur une caisse cubique de 1 mètre de côté posée contre le mur. Le but de ce problème est de déterminer à quelle hauteur l'échelle touche le mur. On note x la distance en mètres entre le haut de la caisse et le haut de l'échelle, y la distance en mètres entre le bas de l'échelle et la caisse.



1. Montrer que $y = \frac{1}{x}$.
2. Prouver que x est solution de l'équation :

$$x^2 + 2x - 14 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

3. À l'aide du changement de variable $u = x + \frac{1}{x}$, déterminer les solutions de l'équation.
4. Résoudre le problème posé au départ.

Exercice 4. Équations paramétriques

Discuter, pour chacune des équations suivantes, l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 2mx + 6 - m = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2mx + 3m - 1 = 0 \quad (2)$$

Exercice 5. Valeur absolue

1. Résoudre l'équation $|3x + 1| = 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $|2x + 1| \leq 7$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'inéquation $|3 - x| \geq 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
4. En élevant les deux membres au carré, résoudre l'équation $|x - 1| = |2x + 4|$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
5. En procédant par disjonction de cas, résoudre l'équation $|x - 3| + |x + 1| = 6$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On pourra interpréter chaque membre comme une distance.

Exercice 6. Limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 5x - 7)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 3x^2 + 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3}{2x^2 + x + 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x - 5}$$

Exercice 7. Limites et quantité conjuguée

Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right)$$

Exercice 8. *Taux d'accroissement et calcul de dérivées par définition*

1. En revenant à la définition du taux d'accroissement, montrer que la fonction carré est dérivable en tout réel a , et que sa dérivée en a vaut $2a$.
2. De même, montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout réel $a \neq 0$, et que $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a = 2$.

Exercice 9. *Tangentes à une parabole passant par un point donné*

Rappel. Pour une fonction f dérivable en α , la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse α a pour équation $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$.

On appelle $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$, et A le point de coordonnées $(0, -4)$.

1. Écrire l'équation de la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse α .
2. Déterminer les réels α pour lesquels $\mathcal{T}_\alpha$ passe par le point A .
3. En déduire qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{P}$ passant par A , et donner leurs équations.

Exercice 10. *Dérivées de fonctions composées*

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant l'intervalle sur lequel le calcul est valable :

1. $h(x) = (3x^2 - 1)^4$
2. $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$
3. $h(x) = \sqrt{2x + 5}$
4. $h(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 4}$
5. $h(x) = (2x - 1)^3(x + 3)^2$

Exercice 11. *Distance à une parabole*

Dans un repère orthonormé, on appelle $\mathcal{P}$ la parabole d'équation : $y = x^2$.

Soit A le point de coordonnées $(6; 3)$. Le but de cet exercice est de déterminer s'il existe un point M appartenant à $\mathcal{P}$ tel que la distance AM soit minimale. On admettra que AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimale.

1. Soit un point M d'abscisse x appartenant à $\mathcal{P}$. Démontrer que :

$$AM^2 = x^4 - 5x^2 - 12x + 45.$$

2. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe AM^2 , c'est à dire :

$$f(x) = x^4 - 5x^2 - 12x + 45.$$

- (a) Préciser sur quel intervalle f est dérivable.
- (b) Calculer $f'(x)$.
- (c) Montrer que 2 est une racine de $f'(x)$ (c'est à dire une solution de $f'(x) = 0$).

(d) Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$f'(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Démontrer alors qu'il existe un seul point M_0 de $\mathcal{P}$, d'abscisse 2, telle que AM est minimale.
(b) Donner les coordonnées de M_0 .
5. (a) Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_2$ à $\mathcal{P}$ au point M_0 .
(b) On appelle N le point de $\mathcal{T}_2$ d'abscisse 0. Quelles sont les coordonnées de N ?
(c) Montrer que $AM_0^2 = 17$, que $M_0N^2 = 68$ et que $AN^2 = 85$.
(d) Que peut-on en déduire ?

Corrigés

Exercice 1. Équations : a) $(x+2)^2 = -1$: impossible, un carré étant positif, $S = \emptyset$. b) $(x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow x+2 = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$, $S = \{-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\}$. c) $(x+1)^2 = -2x+6 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1)=0$, $S = \{-5, 1\}$. d) $(2x-1)^2 = -(3x-2)^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2 + (3x-2)^2 = 0$: somme de deux carrés nulle, donc $2x-1=0$ et $3x-2=0$ simultanément, ce qui est impossible ($x = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$), $S = \emptyset$. Inéquations : e) $(x+2)^2 \geq 9 \Leftrightarrow |x+2| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -5$ ou $x \geq 1$, $S =]-\infty, -5] \cup [1, +\infty[$. f) $x^2 - 5x + 3 > 0$, $\Delta = 13 > 0$, racines $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$, le trinôme (coefficient dominant $1 > 0$) est positif à l'extérieur des racines : $S =]-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{13}}{2}, +\infty[$. g) $-3x^2 + 2x - 2 > 0$: $\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$ et $a = -3 < 0$, le trinôme est toujours strictement négatif, $S = \emptyset$. h) Le dénominateur $x^2 - 2x + 3$ a pour discriminant $4 - 12 = -8 < 0$ et pour coefficient dominant $1 > 0$: il est toujours strictement positif, donc $\frac{2x+3}{x^2-2x+3} > 1 \Leftrightarrow 2x+3 > x^2-2x+3 \Leftrightarrow x^2-4x < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0$, $S =]0, 4[$.

Exercice 2. 1) Avec $y = x^2 \geq 0$: $-3y^2 + 2y - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y + \frac{1}{4} > 0$, $\Delta = 4 - 3 = 1$, racines $y = \frac{1}{6}$ ou $y = \frac{1}{2}$; le trinôme (coefficient dominant $3 > 0$) est strictement positif à l'extérieur des racines, soit $y < \frac{1}{6}$ ou $y > \frac{1}{2}$. En revenant à x : $x^2 < \frac{1}{6} \Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}[$, et $x^2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$. Donc $S =]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$. 2) L'équation est palindromique et $x = 0$ n'est pas solution ; on divise par x^2 : $3(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 4(x + \frac{1}{x}) + 2 = 0$. Avec $y = x + \frac{1}{x}$, on a $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, d'où $3(y^2 - 2) - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y - 4 = 0$, $\Delta = 64$, $y = 2$ ou $y = -\frac{2}{3}$. Pour $y = 2$: $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Pour $y = -\frac{2}{3}$: $3x^2 + 2x + 3 = 0$, $\Delta = 4 - 36 < 0$, pas de solution réelle. $S = \{1\}$. 3) $\sqrt{x^2+1} = x-2$ nécessite $x-2 \geq 0$, soit $x \geq 2$. En élevant au carré : $x^2+1 = x^2-4x+4 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$, incompatible avec $x \geq 2$. $S = \emptyset$.

Exercice 3. 1) Les deux triangles rectangles séparés par le coin de la caisse sont semblables (l'un de côtés 1 et x , l'autre de côtés y et 1), d'où $\frac{x}{1} = \frac{1}{y}$, soit $y = \frac{1}{x}$. 2) La longueur de l'échelle donne $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$; en remplaçant $y = \frac{1}{x}$ et en développant, on obtient $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{2}{x} - 14 = 0$, c'est-à-dire $x^2 + 2x - 14 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. 3) Avec $u = x + \frac{1}{x}$, on a $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$ et $2x + \frac{2}{x} = 2u$, donc l'équation devient $u^2 + 2u - 16 = 0$, $\Delta = 68$, $u = -1 \pm \sqrt{17}$. Comme $x > 0$, l'inégalité arithmético-géométrique donne $u = x + \frac{1}{x} \geq 2$, donc seul $u = -1 + \sqrt{17} \approx 3,12$ convient. On résout alors $x^2 - ux + 1 = 0$, d'où $x = \frac{(\sqrt{17}-1) \pm \sqrt{14-2\sqrt{17}}}{2}$. 4) Numériquement, $x \approx 2,76$ ou $x \approx 0,36$ (les deux solutions se correspondent par l'échange $x \leftrightarrow y$ et décrivent les deux façons possibles d'appuyer l'échelle contre la caisse). La hauteur cherchée est $x+1$: l'échelle touche le mur à une hauteur d'environ 3,76 m (ou, pour l'autre position, environ 1,36 m).

Exercice 4. a) $x^2 - 2mx + 6 - m = 0$: $\Delta = 4m^2 + 4m - 24 = 4(m+3)(m-2)$. Si $m < -3$ ou $m > 2$: $\Delta > 0$, $S = \{m - \sqrt{m^2+m-6}, m + \sqrt{m^2+m-6}\}$. Si $m = -3$ ou $m = 2$: $\Delta = 0$, $S = \{m\}$. Si $-3 < m < 2$: $\Delta < 0$, $S = \emptyset$. b) $\frac{1}{2}x^2 + 2mx + 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4mx + 6m - 2 = 0$. Le discriminant réduit (avec $b' = 2m$) vaut $\Delta' = 4m^2 - (6m-2) = 4m^2 - 6m + 2 = 2(2m-1)(m-1)$. Si $m < \frac{1}{2}$ ou $m > 1$: $\Delta' > 0$, $S = \{-2m - \sqrt{4m^2-6m+2}, -2m + \sqrt{4m^2-6m+2}\}$. Si $m = \frac{1}{2}$ ou $m = 1$: $\Delta' = 0$, $S = \{-2m\}$. Si $\frac{1}{2} < m < 1$: $\Delta' < 0$, $S = \emptyset$.

Exercice 5. 1) $|3x+1| = 4 \Leftrightarrow 3x+1 = 4$ ou $3x+1 = -4$, $S = \{-\frac{5}{3}, 1\}$. 2) $|2x+1| \leq 7 \Leftrightarrow -8 \leq 2x \leq 6$, $S = [-4, 3]$. 3) $|3-x| \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 7$, $S =]-\infty, -1] \cup [7, +\infty[$. 4) $|x-1| = |2x+4| \Leftrightarrow (x-1)^2 = (2x+4)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0$, $S = \{-5, -1\}$. 5) $|x-3|$ est la distance de x à 3, $|x+1|$ la distance de x à -1 ; pour $x \in [-1, 3]$, la somme vaut constamment 4 (distance entre -1 et 3), jamais 6. Pour $x < -1$: $(3-x) + (-x-1) = 2-2x = 6 \Leftrightarrow x = -2$ (convient). Pour $x > 3$: $(x-3) + (x+1) = 2x-2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$ (convient). $S = \{-2, 4\}$.

Exercice 6. 1) $-\infty$ (terme dominant $-2x^3 \rightarrow -\infty$). 2) $+\infty$ (terme dominant $x^4 \rightarrow +\infty$). 3) $\frac{5}{2}$ (quotient des coefficients dominants). 4) 0 (degré du numérateur < degré du dénominateur). 5) $+\infty$ (degré du numérateur > degré du dénominateur, quotient équivalent à $\frac{x^2}{2} \rightarrow +\infty$).

Exercice 7. 1) $\sqrt{x^2+3x} - x = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$, et en divisant numérateur et dénominateur par x , cette expression tend vers $\frac{3}{2}$ quand $x \rightarrow +\infty$. 2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. 3) $\sqrt{x^2+1} + x =$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$; quand $x \rightarrow -\infty$, $\sqrt{x^2+1} \rightarrow +\infty$ et $-x \rightarrow +\infty$, donc le dénominateur tend vers $+\infty$ et la limite est 0.

Exercice 8. 1) $\frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2a$: la fonction carré est dérivable en tout a , de dérivée $2a$. 2) $\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{-h}{h a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{a^2}$: f est dérivable en tout $a \neq 0$, de dérivée $-\frac{1}{a^2}$. 3) $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f'(2) = -\frac{1}{4}$, donc la tangente a pour équation $y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} = -\frac{x}{4} + 1$.

Exercice 9. 1) $\mathcal{T}_\alpha$ a pour équation $y = 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 = 2\alpha x - \alpha^2$. 2) $\mathcal{T}_\alpha$ passe par $A(0, -4)$ ssi $-4 = -\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2$. 3) Il existe donc exactement deux tangentes : pour $\alpha = 2$, $y = 4x - 4$; pour $\alpha = -2$, $y = -4x - 4$.

Exercice 10. 1) $h(x) = (3x^2 - 1)^4$, $h'(x) = 4(3x^2 - 1)^3 \times 6x = 24x(3x^2 - 1)^3$, valable sur $\mathbb{R}$. 2) $h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $h'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$, valable sur $\mathbb{R}$. 3) $h(x) = \sqrt{2x + 5}$, $h'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x + 5}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 5}}$, valable sur $] -\frac{5}{2}, +\infty[$. 4) $h(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$, $h'(x) = \frac{(x^2+4) - (x+1)(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 4}{(x^2+4)^2}$, valable sur $\mathbb{R}$. 5) $h(x) = (2x-1)^3(x+3)^2$, $h'(x) = 6(2x-1)^2(x+3)^2 + 2(2x-1)^3(x+3) = 2(2x-1)^2(x+3)[3(x+3) + (2x-1)] = 2(2x-1)^2(x+3)(5x+8)$, valable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. 1) $AM^2 = (x-6)^2 + (x^2-3)^2 = x^4 - 5x^2 - 12x + 45$ après développement. 2) a) f est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. b) $f'(x) = 4x^3 - 10x - 12$. c) $f'(2) = 32 - 20 - 12 = 0$. d) La division euclidienne de f' par $(x-2)$ donne $f'(x) = (x-2)(4x^2 + 8x + 6)$, donc $a = 4$, $b = 8$, $c = 6$. 3) $4x^2 + 8x + 6$ a pour discriminant $64 - 96 = -32 < 0$ et coefficient dominant $4 > 0$: il est toujours strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $(x-2)$; f est strictement décroissante sur $] -\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$. 4) a) f atteint donc son minimum global en $x = 2$, minimum unique par stricte monotonie de part et d'autre : il existe un unique point M_0 de $\mathcal{P}$, d'abscisse 2, réalisant la distance minimale. b) $M_0 = (2, 4)$. 5) a) $\mathcal{T}_2$ a pour équation $y = 4x - 4$ (formule de la tangente en $\alpha = 2$, cf. exercice 9). b) $N = (0, -4)$. c) $AM_0^2 = f(2) = 16 - 20 - 12 + 45 = 17$; $M_0N^2 = (2-0)^2 + (4-(-4))^2 = 4 + 64 = 68$; $AN^2 = (6-0)^2 + (3-(-4))^2 = 36 + 49 = 85$. d) Comme $AM_0^2 + M_0N^2 = 17 + 68 = 85 = AN^2$, la réciproque du théorème de Pythagore donne $(AM_0) \perp (M_0N)$: le segment $[AM_0]$ est perpendiculaire à la tangente $\mathcal{T}_2$ en M_0 , ce qui est cohérent avec le fait que M_0 réalise la distance minimale entre A et la parabole.