
Devoir surveillé

Exercice 1. *Equations variées*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1.

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

2.

$$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$$

3.

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

Exercice 2. *Equations avec des valeurs absolues*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x - 4| = 2$

2. $|x + 7| < 3$

3. $|2x + 4| \leq 6$

4. $|3x^2 - |2x + 1|| = 0$.

Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -2$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2}.$$

1. Étude de f_6 (on considère $m = 6$ dans cette partie) :

(a) Mettre $f_6(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_6}$.

(b) Représenter $\mathcal{C}_{f_6}$ dans un repère orthonormé.

2. Résolution de l'équation paramétrique :

$$(E) \quad x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2} = 0$$

(a) Pour $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -2$, calculer le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m , et dresser le tableau de signe de ce discriminant en fonction de m .

(b) Discuter, selon la valeur du paramètre m , le nombre de solutions de l'inéquation (E) ci-dessus.

Exercice 4. *Bonus*

Prouver que pour deux réels x et y , on a :

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$

Indication : Trouver u, v tels que $u + v = x$ et $u - v = y$.