

Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Equations variées*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1.

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{3x^2 + 3x + 1} > 0$$

Le trinôme $S(x) = x^2 - 7x + 12$ a pour racines 3 et 4 donc on a :

$$S(x) = (x - 3)(x - 4).$$

Le trinôme $U(x) = 3x^2 + 3x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$ donc $U(x)$ ne s'annule pas et est toujours strictement positif.

L'inéquation revient donc à :

$$(x - 3)(x - 4) > 0$$

On en déduit (au moyen d'un tableau de signe par exemple) que l'ensemble des solutions est : $]-\infty, 3[\cup]4, +\infty[$

2.

$$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$$

On pose $V(X) = X^2 - 4X - 5$. Ce trinôme a pour racines -1 et 5 .

Ainsi, les solutions de l'équation sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = -1$ ou $x^2 = 5$. On en déduit qu'il y a exactement deux solutions à l'équation : $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$.

3.

$$x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

Cette dernière équation n'a pas pour solution 0, et pour $x \neq 0$, on peut tout diviser par x^2 afin d'obtenir :

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 3 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

En posant $u = x + \frac{1}{x}$, on a $u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$. Ainsi, x est solution de l'équation si et seulement si u vérifie :

$$u^2 - 2 - \frac{1}{2}u - 3 = 0$$

$$u^2 - \frac{1}{2}u - 5 = 0$$

Les deux solutions de cette dernière équation sont $u_1 = -2$ et $u_2 = \frac{5}{2}$.

Il nous reste, dans chacun des deux cas, à résoudre l'équation $x + \frac{1}{x} = u$, qui équivaut à :

$$x - u + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x^2 - ux + 1}{x} = 0$$

$$x^2 - ux + 1 = 0$$

Pour $u = -2$, le discriminant Δ est nul et l'unique solution est $x = -1$.

Pour $u = \frac{5}{2}$, on a deux solutions $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$.

L'équation admet un ensemble de 3 solutions : $\{-1; \frac{1}{2}; 2\}$.

Exercice 2. *Valeur absolue*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x - 4| = 2$

On a donc à résoudre $x - 4 = 2$ ou $x - 4 = -2$, on en déduit deux solutions $x = 6$ ou $x = 2$.

2. $|x + 7| < 3$

$|x + 7| = |x - (-7)|$ mesure la distance entre x et -7 , on voit donc que l'ensemble des solutions est l'intervalle ouvert $] -10, -4[$.

3. $|2x + 4| \leq 6$

Cette équation équivaut à :

$$|2(x + 2)| \leq 6$$

$$2|x + 2| \leq 6$$

$$|x + 2| \leq 3$$

$|x + 2| = |x - (-2)|$ mesure la distance entre x et -2 , on voit donc que l'ensemble des solutions est l'intervalle fermé $[-5, 1]$.

4. $|3x^2 - |2x + 1|| = 0$.

Le seul nombre dont la valeur absolue vaut 0 est 0 donc on résout :

$$3x^2 - |2x + 1| = 0$$

$$|2x + 1| = 3x^2$$

Si $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq 3x^2$ donc cette équation équivaut à $2x + 1 = 3x^2$ ou $2x + 1 = -3x^2$.

La première équation a pour solutions $-\frac{1}{3}$ et 1, la deuxième a un discriminant Δ strictement négatif

Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2}.$$

1. Étude de f_6 :

(a)

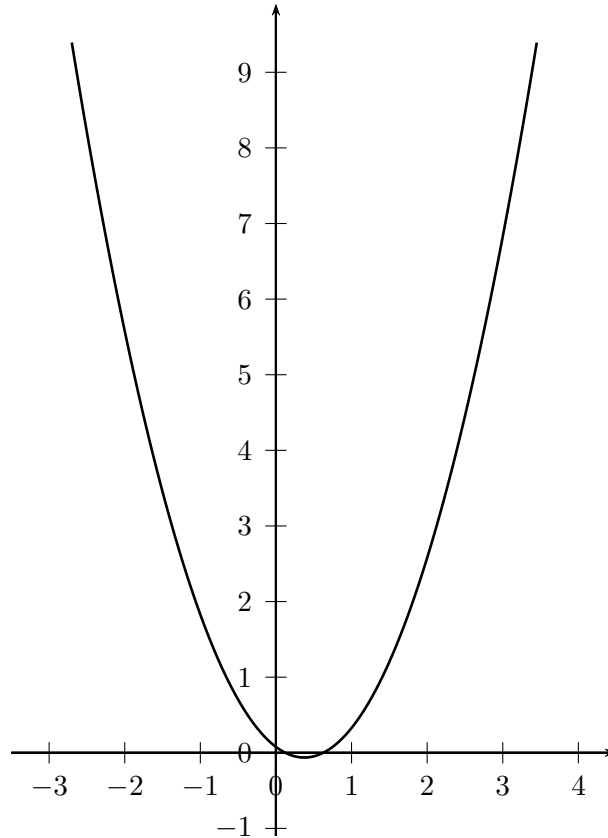
$$f_6(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{64}$$

$$f_6(x) = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} + \frac{5}{64}$$

$$f_6(x) = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

On en déduit les coordonnées $(\frac{3}{8}, -\frac{1}{16})$ du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_6}$.

(b) Voici la courbe $\mathcal{C}_{f_6}$ tracée dans un repère orthonormé :



2. Résolution de l'équation paramétrique :

$$(E) \quad x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2} = 0$$

(a) Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, calculons le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m :

$$\Delta(m) = \frac{m^2}{(m+2)^2} - 4 \frac{m+4}{2(m+2)^2}$$

$$\Delta(m) = \frac{m^2 - 2m - 8}{(m+2)^2}$$

Le trinôme $\phi(m) = m^2 - 2m - 8$ a pour racines $m_1 = -2$ et $m_2 = 4$, on en déduit le tableau de signe de $\Delta(m)$ en fonction de m :

m	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$\Delta(m)$	$+$	0	$-$	0	$+$

(b) Du tableau de signe ci-dessus, on déduit :

- si $m \in]-2, 4[$, $\Delta(m) < 0$ et l'équation (E) n'a aucune solution ;
- si $m = 4$, $\Delta(4) = 0$ et l'équation (E) a une seule solution ;
- si $m \in]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[$, $\Delta(m) > 0$ et l'équation (E) a deux solutions.

Exercice 4. Bonus

Prouver que pour deux réels x et y , on a :

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$

Suivant l'indication, on pose $u = \frac{1}{2}(x + y)$ et $v = \frac{1}{2}(x - y)$.
On sait d'après l'inégalité triangulaire que :

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

On a aussi :

$$|u + (-v)| \leq |u| + |-v|$$

On ajoute ces deux dernières inégalités, ce qui nous donne :

$$|u + v| + |u - v| \leq |u| + |v| + |u| + |-v|$$

$$|x| + |y| \leq 2|u| + 2|v|$$

$$|x| + |y| \leq |2u| + |2v|$$

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$