

Devoir à la maison

Exercice 1. *Etudes de fonctions*

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$$

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f , les limites de f aux bords de D_f , réaliser un tableau de variations.

2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 2. *Majoration d'une famille de fonctions*

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on pose pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$f_r(x) = (1+x)^r - 1 - rx$$

Le but de ce problème est de montrer que pour $r \in \{-2, -1, \frac{1}{2}, 2\}$, il existe une constante A_r telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad |f_r(x)| \leq A_r x^2$$

et de trouver la meilleure constante A_r possible, qui sera notée A'_r

1. On suppose que : $r = 2$.
Calculer $f_2(x)$ et montrer que $A'_2 = 1$.
2. On suppose que : $r = -1$.
(a) Calculer $f_{-1}(x)$.
(b) Montrer que : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad 0 \leq \frac{1}{1+x} - (1-x) \leq 2x^2$.
(c) Montrer que : $A'_{-1} = 2$.
3. On suppose que : $r = -2$.
(a) Calculer $f_{-2}(x)$.
(b) Montrer que : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad 0 \leq \frac{1}{(1+x)^2} - (1-2x) \leq 8x^2$.
(c) Montrer que : $A'_{-2} = 8$.
4. On suppose que : $r = \frac{1}{2}$.
(a) Calculer $f_{\frac{1}{2}}(x)$.
(b) Montrer que : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad 0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{x^2}{2}$.
(c) Montrer que $\frac{1}{2}$ n'est pas la meilleure valeur possible.
(d) Pouvez-vous déterminer $A'_{\frac{1}{2}}$?