

Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1. Etudes de fonctions

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$$

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f , les limites de f aux bords de D_f , réaliser un tableau de variations.

En calculant le discriminant du trinôme $T(x) = x^2 - 4x + 5$, $\Delta = -4 < 0$, on constate que $T(x)$ ne s'annule pas donc $D_f = \mathbb{R}$.

f est dérivable sur D_f puisque c'est un quotient de polynômes, et l'on a :

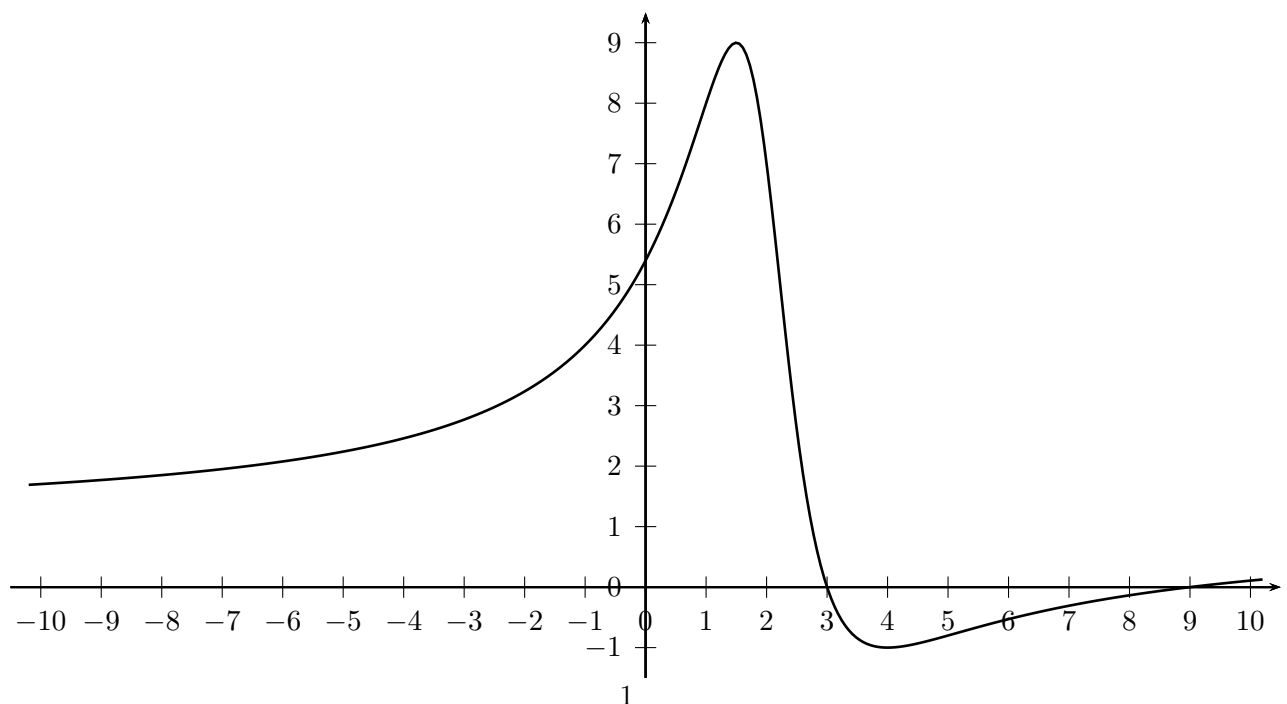
$$f'(x) = \frac{4(2x^2 - 11x + 12)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

On peut aisément calculer le discriminant de $U(x) = 2x^2 - 11x + 12$, $\Delta = 25$, puis en déduire les deux racines $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 4$ afin de dresser le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$	
$U(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f sont les mêmes que celles de $\frac{x^2}{x^2} = 1$ donc f a pour limite 1 en les deux bords de son domaine de définition. Comme la dérivée $f'(x)$ est du même signe que $U(x)$, on peut enfin réaliser un tableau de variations puis tracer la courbe.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
$f(x)$	1	9	-1	1



2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

— On commence par étudier la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

On remarque que g est dérivable et que si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Cette dérivée est de signe négatif sur $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante. Ainsi, on a si $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) \leq g(0)$ i.e. $\ln(1+x) - x \leq 0$.

On a démontré la deuxième inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

— On étudie alors la fonction $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

On remarque que h est dérivable et que si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$

Cette dérivée est de signe positif sur $\mathbb{R}_+$ donc h est croissante. Ainsi, on a si $x \in \mathbb{R}_+$: $h(0) \leq h(x)$ i.e. $0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

On a démontré la première inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

Exercice 2. Majoration d'une famille de fonctions

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on pose pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$f_r(x) = (1+x)^r - 1 - rx$$

Le but de ce problème est de montrer que pour $r \in \{-2, -1, \frac{1}{2}, 2\}$, il existe une constante A_r telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], |f_r(x)| \leq A_r x^2$$

et de trouver la meilleure constante A_r possible, qui sera notée A'_r

1. On suppose que : $r = 2$.

Calculons $f_2(x) = 1 + 2x + x^2 - 1 - 2x$, on en déduit que $f_2(x) = x^2$

Ainsi, l'inégalité $|f_2(x)| \leq A_2 x^2$ équivaut à $0 \leq (A_2 - 1)x^2$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $A_2 - 1 \geq 0$, donc on a $A'_2 = 1$.

2. On suppose que : $r = -1$.

(a) Calculons $f_{-1}(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$.

(b) On souhaite montrer que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 0 \leq \frac{1}{1+x} - (1-x) \leq 2x^2$.

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, on remarque que $(1+x) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ est un nombre strictement positif. Ainsi, la double inégalité équivaut à : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 0 \leq 1 - (1+x)(1-x) \leq (1+x)2x^2$.

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 0 \leq x^2 \leq (1+x)2x^2$$

Pour $x = 0$, les deux inégalités sont des égalités, donc sont vérifiées. Pour $x \neq 0$, on remarque que $x^2 > 0$ donc on peut tout diviser par x^2 et ce que l'on souhaite prouver est équivalent à :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 0 \leq 1 \leq 2(1+x)$$

Or si $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $1+x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ donc $2(1+x) \in [1; 3]$ et les inégalités ci-dessus sont donc vraies.

(c) On voit en reprenant le raisonnement précédent que A_{-1} doit vérifier :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 0 \leq 1 \leq A_{-1}(1+x)$$

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $1 \leq \frac{1}{2}A_{-1}$ d'où $A_{-1} \geq 2$. Comme on a vu à la question précédente que $A_{-1} = 2$ convient, on en déduit que c'est la meilleure constante possible d'où $A'_{-1} = 2$.

3. On suppose que : $r = -2$.

(a) Calculons $f_{-2}(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - 1 + 2x$.

(b) On souhaite montrer que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 0 \leq \frac{1}{(1+x)^2} - (1-2x) \leq 8x^2$.

Soit donc $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, puisque $(1+x)^2 > 0$, cette double inégalité équivaut à :

$$0 \leq 1 - (1-2x)(1+x)^2 \leq 8x^2(1+x)^2$$

$$0 \leq 1 - (1-2x)(1+2x+x^2) \leq 8x^2(1+2x+x^2)$$

$$0 \leq 1 - (1+2x+x^2-2x-4x^2-2x^3) \leq 8x^2(1+2x+x^2)$$

$$0 \leq 3x^2 + 2x^3 \leq 8x^2(1+2x+x^2)$$

Pour $x = 0$, les deux inégalités sont des égalités et sont vérifiées, sinon on peut diviser par x^2 et cette double inégalité équivaut à :

$$0 \leq 3 + 2x \leq 8(1+2x+x^2)$$

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, on a $3+2x \in [2; 4]$ donc l'inégalité de gauche est évidente et il ne nous reste plus qu'à analyser celle de droite qui équivaut à :

$$0 \leq 8x^2 + 14x + 5$$

On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 36$ donc le trinôme admet deux racines qui sont $x_1 = -\frac{5}{4}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$. On sait qu'un tel trinôme est strictement négatif si $x \in]-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}[$, positif ailleurs donc on a démontré l'inégalité souhaitée pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

(c) On voit en reprenant le raisonnement précédent que A_{-2} doit vérifier :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 3+2x \leq A_{-2}(1+2x+x^2)$$

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $2 \leq A_{-2}\frac{1}{4}$, i.e. $A_{-2} \geq 8$. On conclut donc que $A'_{-2} = 8$.

4. On suppose que : $r = \frac{1}{2}$.

(a) Calculons $f_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$.

(b) On souhaite montrer que $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 0 \leq 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \frac{x^2}{2}$.

L'inégalité de gauche est équivalente à :

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

Pour $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, les deux membres de cette inégalité sont positifs, donc il est équivalent de comparer leurs carrés :

$$1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{4}.$$

Cette dernière inégalité étant évidente, il ne reste plus qu'à traiter l'inégalité de droite, équivalente à :

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1+x}$$

Pour $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, il n'est pas difficile de voir que les deux membres de l'inégalité sont positifs, et cette inégalité est donc équivalente à :

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)x^2 + \frac{x^4}{4} \leq 1 + x$$

$$1 + x - \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} \leq 1 + x$$

$$0 \leq \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$

Enfin, on constate que l'inégalité est vérifiée pour $x = 0$, et l'on multiplie tout par $\frac{4}{x^2}$ sinon :

$$0 \leq 3 + 2x - x^2$$

$$0 \leq (x+1)(-x+3)$$

Et cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x \in [-1; 3]$.

- (c) Revenons à l'inégalité de départ, pour que $A_{\frac{1}{2}}$ soit une constante valable, il faut avoir pour tout $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$:

$$1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq A_{\frac{1}{2}}x^2$$

$$\left(1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}\right) \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right) \leq A_{\frac{1}{2}}x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - 1 - x \leq A_{\frac{1}{2}}x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)$$

$$\frac{x^2}{4} \leq A_{\frac{1}{2}}x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)$$

Cette inégalité est toujours vérifiée pour $x = 0$, sinon on doit avoir :

$$\frac{1}{4 \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)} \leq A_{\frac{1}{2}}$$

Le dénominateur est une fonction croissante de x , donc l'expression de gauche est décroissante et atteint son maximum pour $x = -\frac{1}{2}$. Ainsi, la validité de l'inégalité pour tout $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ équivaut à ce qu'elle soit vérifiée en $x = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4 \left(1 - \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \leq A_{\frac{1}{2}} \iff 3 - 2\sqrt{2} \leq A_{\frac{1}{2}}$$

En particulier, $\frac{1}{2}$ n'est pas la meilleure constante.

- (d) On vient de déterminer $A'_{\frac{1}{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$.