
Transformations de graphes, parité et périodicité.

Parité et imparité

Exercice 1. Étude directe de la parité

Étudier la parité de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad g(x) = x^3 - 4x, \quad h(x) = x^2 + x.$$

Exercice 2. Symétrie par rapport à un axe vertical

Soit $f(x) = x^2 + 6x + 5$, définie sur $\mathbb{R}$. À l'aide du critère pratique (ou de la forme canonique), déterminer un réel a tel que $\mathcal{C}_f$ soit symétrique par rapport à la droite $x = a$.

Exercice 3. Symétrie par rapport à un point

Soit $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$, définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. À l'aide du critère pratique, déterminer un point $\Omega(a, b)$ tel que $\mathcal{C}_f$ soit symétrique par rapport à Ω .

Périodicité

Exercice 4. Détermination d'une période

Soit $f(x) = \sin(x) \cos(x)$, définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est périodique, et préciser une période de f (on pourra réécrire $f(x)$ autrement).

Translations et réduction de l'intervalle d'étude

Exercice 5. Lecture d'une transformation

Soit f une fonction dont on connaît le graphe $\mathcal{C}_f$. Décrire, en termes de translation(s), comment obtenir le graphe de $g(x) = f(x+2) - 3$ à partir de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 6. Méthode : réduire l'intervalle d'étude

Soit $f(x) = \cos(2x)$, définie sur $\mathbb{R}$.

- Justifier que f est paire et périodique, et préciser une période de f .
- En déduire un intervalle d'étude réduit pour f , permettant de reconstruire tout son graphe sur $\mathbb{R}$.

Corrigés

Parité et imparité

Exercice 1. $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$: f est **paire**. $g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -g(x)$: g est **impaire**. Pour h : $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$; or $0 \neq 2$ et $0 \neq -2$, donc $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$: h n'est **ni paire ni impaire**.

Exercice 2. On peut écrire $f(x) = (x+3)^2 - 4$, ce qui suggère $a = -3$. Vérifions avec le critère pratique : posons $g(x) = f(x-3) = (x-3)^2 + 6(x-3) + 5 = x^2 - 6x + 9 + 6x - 18 + 5 = x^2 - 4$, qui est bien **paire**. Donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $x = -3$.

Exercice 3. On réécrit $f(x) = \frac{x+4}{x-1} = \frac{(x-1)+5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}$. Essayons $a = 1, b = 1$: $g(x) = f(x+1) - 1 = \left(1 + \frac{5}{x}\right) - 1 = \frac{5}{x}$, qui est bien **impaire**. Donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport au point $\Omega(1, 1)$.

Périodicité

Exercice 4. D'après la formule de duplication, $f(x) = \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$. Or $\sin(2(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$ pour tout x : f est donc **π -périodique**.

Translations et réduction de l'intervalle d'étude

Exercice 5. On a $g(x) = f(x+2) - 3 = f(x - (-2)) - 3$: d'après le théorème sur les translations, $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-2\vec{i} - 3\vec{j}$, c'est-à-dire que l'on obtient $\mathcal{C}_g$ en décalant $\mathcal{C}_f$ de 2 vers la **gauche**, puis de 3 vers le **bas**.

Exercice 6. a) $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$: f est **paire**. De plus $f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)) = \cos(2x+2\pi) = \cos(2x) = f(x)$: f est **π -périodique**. b) f étant paire et π -périodique, il suffit de l'étudier sur une demi-période $[0, \frac{\pi}{2}]$, de compléter le graphe sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par symétrie par rapport à (Oy) , puis de compléter sur $\mathbb{R}$ tout entier par translations successives de vecteur $\pi\vec{i}$.