

Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. Questions de cours

1. (a) On dit que f est **dérivable en** a si le taux d'accroissement

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in I, x \neq a)$$

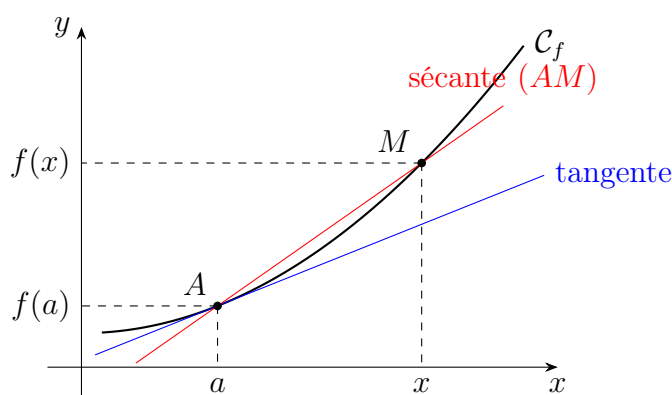
admet une limite **finie** lorsque x tend vers a . Cette limite est le nombre dérivé de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

- (b) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- (c) Le taux d'accroissement $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la sécante passant par $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$. Lorsque x tend vers a , le point M se rapproche de A et la sécante « tend » vers la tangente en A , de coefficient directeur $f'(a)$.



2. On suppose u et v dérivables sur $\mathbb{R}$.

- (a) uv est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

- (b) Si de plus v **ne s'annule pas** sur $\mathbb{R}$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

- (c) $u \circ v$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (u \circ v)'(x) = v'(x) u'(v(x)).$$

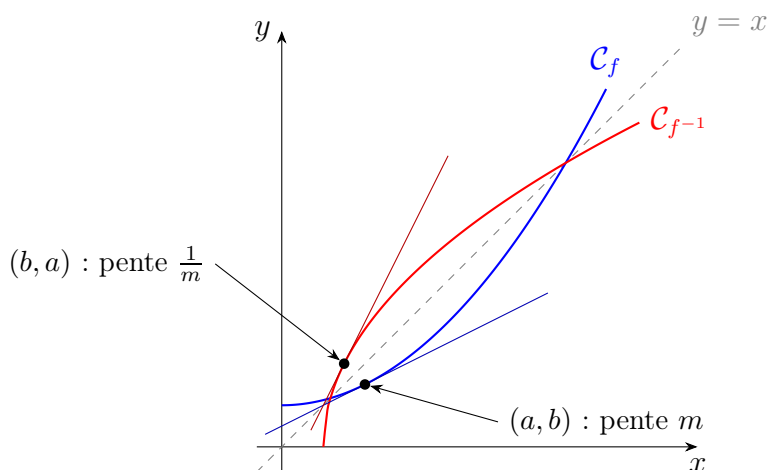
3. (a) f^{-1} est dérivable en x **si et seulement si** $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- (b) Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$: le point (a, b) est sur $\mathcal{C}_f$ si et seulement si le point (b, a) est sur $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en (a, b) a pour symétrique la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ en (b, a) . Une droite d'équation $y = mx + p$ avec $m \neq 0$ a pour symétrique par rapport à Δ la droite d'équation $x = my + p$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{m}x - \frac{p}{m}$: **les coefficients directeurs sont inverses l'un de l'autre**. On retrouve $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Si $f'(a) = 0$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale ; sa symétrique est verticale, et f^{-1} n'est pas dérivable en b .



4. Pour tout réel x :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x.$$

Exercice 2. Une équation symétrique du quatrième degré

0 n'est pas solution de (E) car $2 \neq 0$. Pour $x \neq 0$, on divise (E) par x^2 :

$$(E) \iff 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \iff 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 9 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 14 = 0.$$

On pose $u = x + \frac{1}{x}$. Alors $u^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$ et

$$(E) \iff 2(u^2 - 2) - 9u + 14 = 0 \iff 2u^2 - 9u + 10 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 81 - 80 = 1$, d'où $u = \frac{9+1}{4} = \frac{5}{2}$ ou $u = \frac{9-1}{4} = 2$.

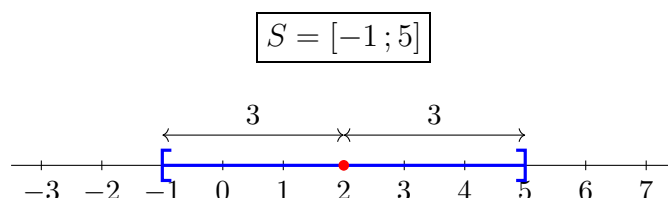
$$\begin{aligned} - \quad x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} &\iff 2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ (car } x \neq 0) : \Delta = 25 - 16 = 9, \text{ donc } x = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ ou } \\ &\quad x = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}. \\ - \quad x + \frac{1}{x} = 2 &\iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{1}{2}; 1; 2 \right\}}$$

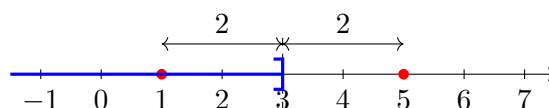
Vérification : $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = (2x-1)(x-2)(x-1)^2$.

Exercice 3. Valeur absolue et distance

1. $|x - 2|$ est la distance entre x et 2. L'inéquation signifie que x est à une distance au plus 3 de 2, c'est-à-dire $2 - 3 \leq x \leq 2 + 3$:



2. (a) $|x - 1|$ est la distance de x à 1 et $|x - 5|$ la distance de x à 5. L'inéquation (I) signifie donc : « x est plus proche de 1 que de 5, ou à égale distance ».
- (b) Le milieu de 1 et 5 est $\frac{1+5}{2} = 3$.



- (c) Le point 3 est à égale distance de 1 et de 5 ; les points situés à gauche de 3 sont plus proches de 1, ceux situés à droite plus proches de 5. Donc

$$\boxed{S =]-\infty; 3]}$$

Vérification par le calcul : les deux membres étant positifs, (I) $\iff (x - 1)^2 \leq (x - 5)^2 \iff -2x + 1 \leq -10x + 25 \iff 8x \leq 24 \iff x \leq 3$.

Exercice 4. Limites

1. En $\pm\infty$, un quotient de polynômes a la même limite que le quotient de leurs termes de plus haut degré :

$$\frac{2x^3 - 5x + 1}{4x - x^3} = \frac{x^3 \left(2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(\frac{4}{x^2} - 1\right)} = \frac{2 - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x^2} - 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-1} = \boxed{-2}.$$

2. De même, $\frac{x^2 + 3x}{2x^3 - 1} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x^3}}$. Or $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et le second facteur tend vers $\frac{1}{2}$, donc la limite vaut $\boxed{0}$.

3. On a une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Pour $x > 0$, on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}.$$

Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, donc

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 5. Trigonométrie

1. Avec les formules d'addition :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

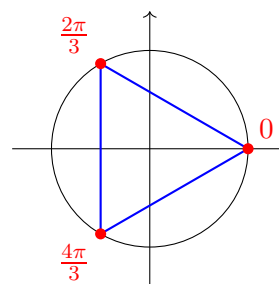
2. On utilise $\cos a = \cos b \iff a \equiv b [2\pi]$ ou $a \equiv -b [2\pi]$:

$$\cos(2x) = \cos(x) \iff 2x \equiv x [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv -x [2\pi] \iff x \equiv 0 [2\pi] \text{ ou } 3x \equiv 0 [2\pi].$$

Or $3x \equiv 0 [2\pi] \iff x \equiv 0 [\frac{2\pi}{3}]$, et les solutions de la première famille ($x = 2k\pi$) sont contenues dans la seconde. Donc

$$S = \left\{ \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Dans $[0; 2\pi[$, les solutions sont $0, \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$: ce sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.



3. On a $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ et $\sin a = \sin b \iff a \equiv b [2\pi]$ ou $a \equiv \pi - b [2\pi]$:

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \iff 2x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{12} [\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{12} [\pi].$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 6. Bijection réciproque et fonction arcsin**Partie A.**

- f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2 + 1$. Pour tout réel x , $3x^2 \geq 0$ donc $f'(x) \geq 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $f(1) = 1 + 1 = 2$. Comme f est bijective, $f^{-1}(2)$ est l'unique antécédent de 2 par f : $\boxed{f^{-1}(2) = 1}$.
- f est dérivable en $f^{-1}(2) = 1$ et $f'(1) = 4 \neq 0$. D'après le cours, f^{-1} est dérivable en 2 et

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(1)} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

4. La tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 2 a pour équation

$$y = (f^{-1})'(2)(x - 2) + f^{-1}(2) = \frac{1}{4}(x - 2) + 1, \quad \text{soit} \quad \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}.$$

Partie B.

1. $\arcsin$ est définie sur $[-1; 1]$ et prend ses valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $y \in [-1; 1]$, $\arcsin(y)$ est l'unique réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \theta = y$.

2. Les angles suivants appartiennent tous à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\arcsin(0) = 0, \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

3. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, donc

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

Le piège : la réponse n'est pas $\frac{5\pi}{6}$, car $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

4. (a) $g(x)$ existe si et seulement si $-1 \leq 2x - 1 \leq 1 \iff 0 \leq 2x \leq 2 \iff 0 \leq x \leq 1$.
Donc $\mathcal{D}_g = [0; 1]$.

(b) On rappelle que $\arcsin$ est dérivable sur $] -1; 1[$ avec $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$. Pour $x \in]0; 1[$, on a $2x - 1 \in] -1; 1[$ et, par la formule de dérivation d'une composée :

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}}.$$

Or $1 - (2x - 1)^2 = 1 - 4x^2 + 4x - 1 = 4(x - x^2)$, avec $x - x^2 = x(1 - x) > 0$ sur $]0; 1[$. Donc $\sqrt{1 - (2x - 1)^2} = 2\sqrt{x - x^2}$ et

$$\boxed{g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}}$$

Exercice 7. Bonus

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|, \quad \text{donc} \quad |x| - |y| \leq |x - y|.$$

En échangeant les rôles de x et y : $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$, c'est-à-dire $|x| - |y| \geq -|x - y|$.
Ainsi

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{||x| - |y|| \leq |x - y|}.$$