
Devoir surveillé

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
 - (a) Donner la définition de « f est dérivable en a » et de son nombre dérivé $f'(a)$.
 - (b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a .
 - (c) Illustrer ces deux notions par un schéma soigné (on fera apparaître une sécante et la tangente).
2. Soient u et v deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Rappeler, sans démonstration, les résultats concernant la dérivabilité et la dérivée de :
 - (a) le produit uv ;
 - (b) le quotient $\frac{u}{v}$ (on précisera l'hypothèse supplémentaire nécessaire sur v) ;
 - (c) la composée $u \circ v$.
3. Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection et $x \in J$. On suppose que f est dérivable en $f^{-1}(x)$.
 - (a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante pour que f^{-1} soit dérivable en x , ainsi que la formule donnant alors $(f^{-1})'(x)$.
 - (b) Sur un même schéma, représenter une fonction bijective f , sa réciproque f^{-1} et la droite d'équation $y = x$. Faire apparaître deux tangentes symétriques par rapport à cette droite, et expliquer le lien entre leurs coefficients directeurs.
4. Donner les trois formules exprimant $\cos(2x)$ et la formule exprimant $\sin(2x)$.

Exercice 2. Une équation symétrique du quatrième degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) \quad 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0.$$

Exercice 3. Valeur absolue et distance

On rappelle que, pour deux réels a et b , le nombre $|a - b|$ est la distance entre a et b sur la droite réelle.

1. Résoudre l'inéquation $|x - 2| \leq 3$ en l'interprétant en termes de distance. On illustrera la résolution sur une droite graduée.
2. On souhaite résoudre l'inéquation (I) $|x - 1| \leq |x - 5|$.
 - (a) Traduire l'inéquation (I) par une phrase utilisant le mot « distance ».
 - (b) Placer les points d'abscisses 1 et 5 sur une droite graduée, ainsi que le milieu de ces deux points.
 - (c) En déduire, sans calcul, l'ensemble des solutions de (I).

Exercice 4. Limites

Calculer les limites suivantes (pour la troisième, on pourra utiliser la quantité conjuguée) :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{4x - x^3} & 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^3 - 1} & 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) \end{array}$$

Exercice 5. Trigonométrie

1. En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x) = \cos(x)$. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions appartenant à l'intervalle $[0; 2\pi[$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Bijection réciproque et fonction arcsin

Partie A. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On admet que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(1)$. En déduire $f^{-1}(2)$.
3. Justifier que f^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(f^{-1})'(2)$.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 2.

Partie B.

1. Rappeler l'ensemble de définition de la fonction arcsin et l'intervalle dans lequel elle prend ses valeurs.
2. Calculer $\arcsin(0)$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
3. Calculer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$. Attention au piège !
4. On pose $g(x) = \arcsin(2x - 1)$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition de g .
 - (b) On admet que g est dérivable sur $]0; 1[$. Montrer que pour tout $x \in]0; 1[$:

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}.$$

Exercice 7. Bonus

À l'aide de l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tous réels x et y : $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Indication : on pourra écrire $x = (x - y) + y$.